

## Investigaciones teórico-computacionales para el desarrollo de prótesis articulares de mayor duración para miembro inferior

Brenda A. Weiss, Sebastián Ubal, Marcelo E. Berli y José Di Paolo

AUTORES: Grupo Biomecánica Computacional, Facultad de ingeniería – UNER, Ruta 11, km 10, 3100 Oro Verde, Entre Ríos, Argentina. [http://ingenieria.uner.edu.ar/grupos/biomecanica\\_computacional/](http://ingenieria.uner.edu.ar/grupos/biomecanica_computacional/)

CONTACTO: [jdipaolo@ingenieria.uner.edu.ar](mailto:jdipaolo@ingenieria.uner.edu.ar)

### Resumen

El desgaste de las superficies articulares en prótesis de rodilla y cadera es uno de los principales mecanismos de falla de las mismas. La lubricación de las mismas es fundamental para reducir la fricción, disminuir el desgaste y extender la vida útil del implante. Además, el estudio de la lubricación en articulaciones naturales podría orientar acerca de cuáles son los factores determinantes de sus excelentes características tribológicas, guiando en la mejora del desempeño de articulaciones protésicas. Este proyecto pretendía contribuir a determinar un modelo apropiado para el estudio de la lubricación por película delgada. Mediante la adopción de parámetros adecuados, el modelo desarrollado en este proyecto es apto para su aplicación en articulaciones naturales o protésicas, de cadera o de rodilla. Se evaluó la influencia del comportamiento no-Newtoniano del fluido sinovial, usualmente considerado como fluido Newtoniano o Newtoniano generalizado. Se evaluó la influencia de la geometría adoptada y distintos modelos de deformación. Se obtuvieron resultados para distintos casos de estudio, los cuales han sido publicados en revistas científicas nacionales e internacionales.

**Palabras clave:** cadera, rodilla, lubricación, prótesis, deformación

### Theoretical-computational research for the development of lifetime prostheses for lower limb

#### Abstract

Wear is the main mechanism of knee and hip prostheses failure. Lubrication is essential to reduce friction, reduce wear and extend the life of the implant. Also, the study of the lubrication in natural joints could guide about which are the determining factors of its excellent tribological characteristics, providing information to improve the performance of prosthetic joints. This project aims to contribute to determine an appropriate model for the study of thin film lubrication. By adopting adequate parameters, the developed model is applicable to natural or prosthetic, hip or knee joints. The influence of the non-Newtonian behavior of the synovial fluid, usually considered as Newtonian or generalized Newtonian fluid, was evaluated. The influence of the adopted geometry and different deformation models were evaluated. The results obtained for different case, have been published in national and international scientific journals.

**Key words:** hip, knee, lubrication, prosthesis, deformation

## Introducción

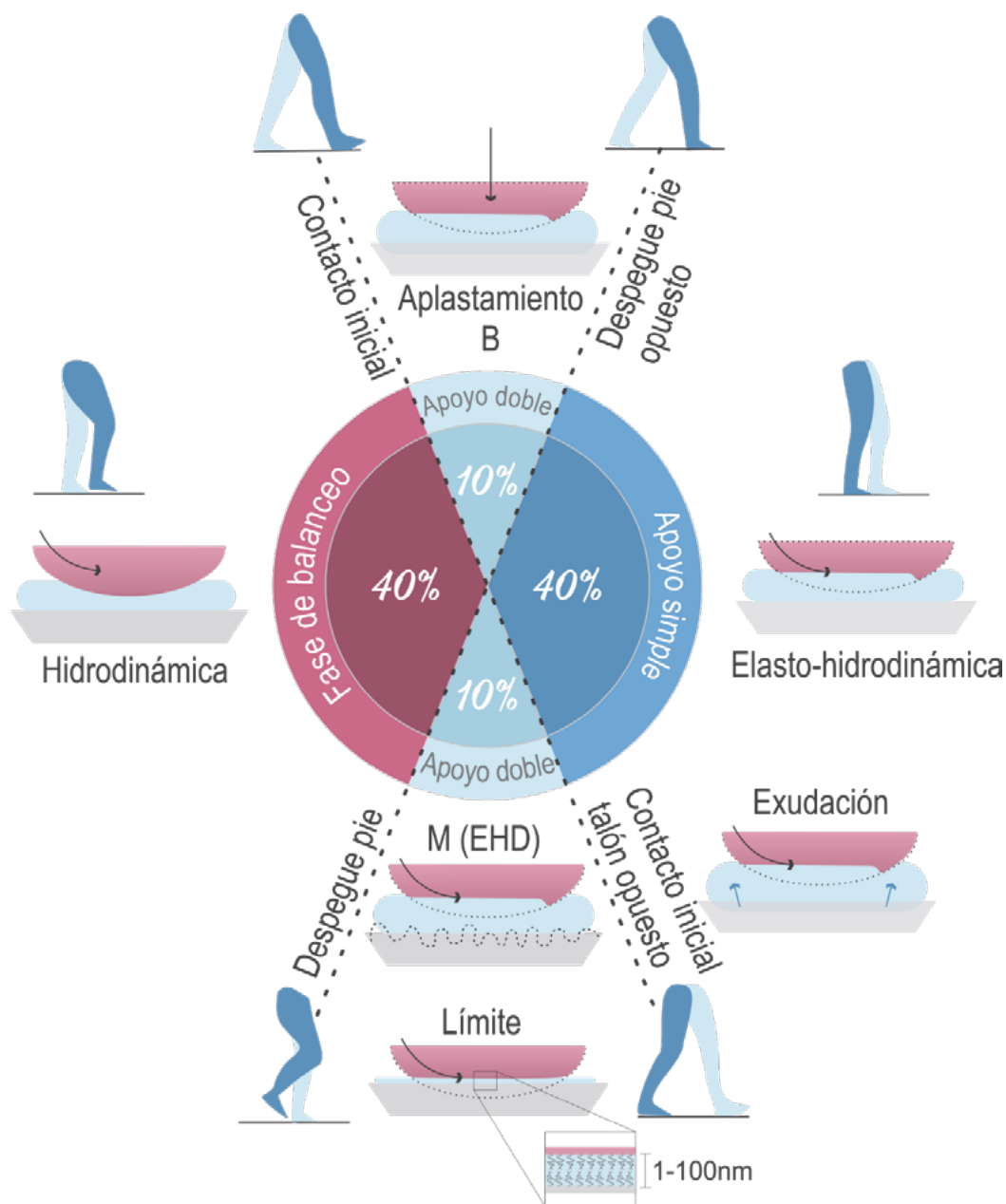
Las articulaciones de rodilla y cadera son articulaciones sinoviales de tipo diartrosis, es decir permiten gran movilidad entre los huesos que la componen (fémur y tibia en rodilla, fémur y coxal en cadera) los cuales están rodeados de una cápsula fibrosa que, junto a las superficies articulares, delimitan la cavidad sinovial. La cápsula articular está recubierta, hacia el interior de la cavidad sinovial, por la membrana sinovial que segrega líquido sinovial. Las superficies articulares se encuentran recubiertas por cartílago hialino (también llamado cartílago articular), un material deformable y poroso, formado por un entramado de moléculas hidrofílicas que le permiten mantener un alto grado de hidratación y, ante la acción de una carga, exudar líquido por compactación hacia el espacio articular. La presencia del líquido sinovial y la capacidad del cartílago hialino de exudar o absorber líquido favorecen la lubricación de la articulación natural, preservándola con un mínimo de fricción entre las superficies en contacto y tasas de desgaste muy bajas.

Estas articulaciones pueden verse afectadas por enfermedades (como artritis o artrosis), anomalías congénitas, tumores o traumas, siendo generalmente la artroplastía (reemplazo) de cadera o rodilla la solución clínica más apropiada. Los implantes metal-polietileno de ultra alto peso molecular (UHMWPE, del inglés *ultra-high-molecular-weight-polyethylene*) son los más populares para el reemplazo de articulaciones de cadera y rodilla (Carr y Goswami, 2009; Knahr, 2011). Alrededor del 95% de estos implantes sobreviven los 10 años y alrededor del 80% alcanzan los 25 años; sin embargo, esta vida útil resulta insatisfactoria para pacientes menores de 60 años, que deben someterse a nuevas intervenciones quirúrgicas (revisiones) para reemplazar dichos implantes (Sharkey et al., 2002; Pivec et al., 2012). Las revisiones son cirugías complicadas, riesgosas y costosas, además, los nuevos implantes suelen ser menos exitosos que los primeros (Davim, 2013).

Las consecuencias del desgaste de las superficies protésicas constituyen el principal factor limitante de la vida útil de estas prótesis (Sharkey et al., 2002; Bozic y Ries, 2005). Las partículas producidas por el desgaste migran a la cavidad articular y al espacio periprotésico incrementando el desgaste de las superficies articulares y provocando reacciones tisulares inflamatorias que pueden resultar en la osteólisis y el aflojamiento aséptico del implante (Bozic y Ries, 2005; Davim, 2013) y por ende su reemplazo (Sharkey et al., 2002; Pivec et al., 2012).

Dado que la cápsula articular es preservada en la artroplastía de cadera y rodilla, el implante también estará lubricado, siendo esto un factor fundamental para reducir la fricción y el desgaste de las superficies en contacto. Este PID tenía como objetivo investigar desde las artes de la Mecánica Computacional el fenómeno de contacto lubricado entre las superficies de los componentes de prótesis para miembro inferior, con el fin de predecir combinaciones de parámetros geométricos, físicos y operativos que aseguren la existencia del contacto lubricado, minimicen la fricción evitando el contacto sólido-sólido entre las partes y de esta forma incrementar la vida útil del implante.

A lo largo de un ciclo de marcha típico ocurren diversos mecanismos de lubricación dependiendo de la magnitud y dirección de la carga, de la geometría de las superficies articulares y su rugosidad, de las propiedades materiales de las superficies, de la velocidad a la cual opera la articulación, y de las características reológicas del lubricante. En términos generales los mecanismos de lubricación predominantes en articulaciones de rodilla y cadera en cada fase del ciclo de marcha se muestran en la Figura 1 (Whittle, 2006; Ramachandran, 2006).



**FIGURA 1** – Fases de un ciclo de marcha típico (pierna derecha) y mecanismos de lubricación predominantes en cada una de ellas. M(EHD)= lubricación micro-elastohidrodinámica. B= lubricación intensificada (boosted lubrication).

En la fase de contacto inicial (10% del ciclo de marcha) predomina la lubricación por aplastamiento de la película lubricante (del inglés *squeeze film lubrication*), en donde las superficies articulares se acercan y el fluido es forzado a escapar del canal de lubricación. Durante la fase de balanceo (40%) los componentes deslizan entre sí con un movimiento relativo que impulsa fluido hacia la zona de contacto, donde se forma un canal de lubricación y el fluido se presuriza (lubricación hidrodinámica). Un comportamiento similar se observa en la fase de apoyo simple (40%) de la fase de apoyo (60%) del ciclo de marcha, sin embargo, aquí se desarrollan en el fluido elevadas presiones que soportan la carga sobre la articulación y producen la deformación elástica de las superficies lubricadas dando lugar a la lubricación elasto-hidrodinámica (Lugt y Morales-Espejel, 2011). Dicha deformación altera las dimensiones del canal de flujo y por consiguiente influye en la distribución de presiones. Como consecuencia de este

fenómeno, las ecuaciones que lo gobiernan están fuertemente acopladas. Cuando las cargas son muy elevadas, las asperezas de las superficies articulares también se deforman (lubricación micro-elastohidrodinámica, (M)EHD), suavizando las superficies y permitiendo la existencia de lubricación de película delgada.

Se han descrito otros mecanismos de lubricación asociados a articulaciones sinoviales, como aquella producto de la capacidad del cartílago articular de exudar líquido cuando es comprimido (en inglés *weeping lubrication*); la lubricación intensificada (del inglés *boosted lubrication*) que, ante condiciones de aplastamiento de la película lubricante, provoca el ingreso de agua al cartílago y en consecuencia el fluido sinovial tiene mayor concentración de ácido hialurónico y proteínas; y la lubricación límite (del inglés *boundary lubrication*), presente en el apoyo prolongado o en la fase de retiro del talón, vinculada a la adsorción a las superficies articulares de ciertas moléculas presentes en el fluido sinovial.

Las articulaciones naturales y protésicas de rodilla y cadera se encuentran más exigidas durante la fase de apoyo del ciclo de marcha, por lo tanto este proyecto se centró en el estudio de la lubricación de película delgada (aplastamiento de película lubricante y lubricación elastohidrodinámica con movimiento relativo en dirección de la marcha).

Las actividades desarrolladas condujeron a la determinación de un modelo, apto para su aplicación en articulaciones naturales y protésicas de cadera y rodilla, y factible de resolverse mediante métodos numéricos. Cabe señalar, que el modelo en sí mismo constituye un resultado novedoso de esta investigación, por lo que a continuación se señalarán en detalle sus características, haciendo referencia oportunamente al estado del arte. Además, se obtuvieron soluciones para distintos casos de estudio, algunos de ellos se encuentran en prensa, otros han sido publicados y otros se presentaron en reuniones científicas o de divulgación.

### Modelo geométrico

Las superficies articulares en la articulación de cadera son esféricas o casi esféricas, siendo la superficie superior del fémur convexa y la superficie coxal (acetábulo) cóncava (Figura 2a, 2c). En la articulación de rodilla (tibiofemoral), el extremo inferior del fémur posee dos cóndilos convexos articulando, cada uno de ellos, con un cóndilo cóncavo presente en el platillo tibial (Figura 2b, 2d).

Diversos modelos geométricos se han propuesto para el análisis de la lubricación de película delgada en estas articulaciones:

- **Modelo tridimensional esfera en casquete** (del inglés *Ball-in-socket*): es utilizado frecuentemente en articulaciones de cadera, y deriva en un conjunto de ecuaciones expresadas en coordenadas esféricas cuya resolución tiene un costo computacional elevado. Habitualmente su empleo está asociado a simplificaciones del comportamiento reológico del líquido sinovial (Liu et al., 2006), del movimiento relativo entre las superficies articulares o las mismas se suponen rígidas (Meziane et al., 2008).
- **Modelo bidimensional elipsoide sobre plano** (EoP, del inglés *Ellipsoid-on-Plane*): Jin et al. (1995) sugirieron modelar uno de los cóndilos de la articulación de rodilla como un elipsoide rígido en contacto con una capa plana o prisma (Figura 3) pudiendo ésta ser deformable. Esto permite expresar el conjunto de ecuaciones en coordenadas cartesianas, usualmente de más sencilla solución. Este modelo fue utilizado en esta investigación para el estudio de articulaciones naturales y protésicas de rodilla (Weiss et al., 2018; Weiss et al., 2019). En la Figura 3 se muestra el sistema de coordenadas utilizado: el eje x se encuentra en la dirección antero-posterior (AP), el eje y se encuentra en la dirección medial-lateral (latero-lateral) y el eje z en la dirección cráneo-caudal. El radio principal del elipsoide en la dirección antero-posterior ( $R_x, R_x$ , entraining direction, Figura 3) y el radio principal del elipsoide en la dirección medial-lateral ( $R_y, R_y$ ) se obtienen a partir de las curvaturas de las superficies articulares.

- **Modelo bidimensional esfera sobre plano (BoP, del inglés Ball-on-Plane):** este modelo es frecuentemente utilizado en articulación de cadera (Mattei et al., 2011). Note que adoptando  $R_x = R_y = RR_x = R_y = R$  en el modelo EoP se recupera el modelo BoP. Este modelo fue utilizado en esta investigación para el estudio de la lubricación EHD en prótesis de cadera (Weiss et al., 2015) y para evaluar la validez de distintos modelos de deformación (Marinelli et al., 2018).
- **Modelo bidimensional plano sobre plano (PoP, del inglés Plane-on-Plane):** no tiene en cuenta la curvatura de las superficies articulares por lo que su uso suele estar asociado a estudios preliminares en los cuales las ecuaciones constitutivas del fluido lubricante o del material deformable presentan una complejidad tal que hacen el estudio de la lubricación muy difícil (Yousfi et al. 2013, Tichy y Bou-Saïd, 2008). Note que adoptando en el modelo EoP valores de  $R_x R_x$  y  $R_y R_y$  muy grandes respecto a la longitud del dominio  $LL$ , se recupera el modelo PoP.
- **Modelo unidimensional cilindro sobre plano (CoP, del inglés Cylinder-on-Plane):** este modelo sólo es válido en articulaciones de rodilla, en las cuales el conjunto osteoartromuscular y ligamentario le permite tener principalmente un único grado de libertad (Berli, 2010). El cilindro contempla la curvatura antero-posterior de un cóndilo femoral y de su correspondiente platillo tibial, despreciando la curvatura en la dirección medial-lateral (ver Figura 3a). La gran movilidad de las articulaciones de cadera exige mínimamente modelos bidimensionales.

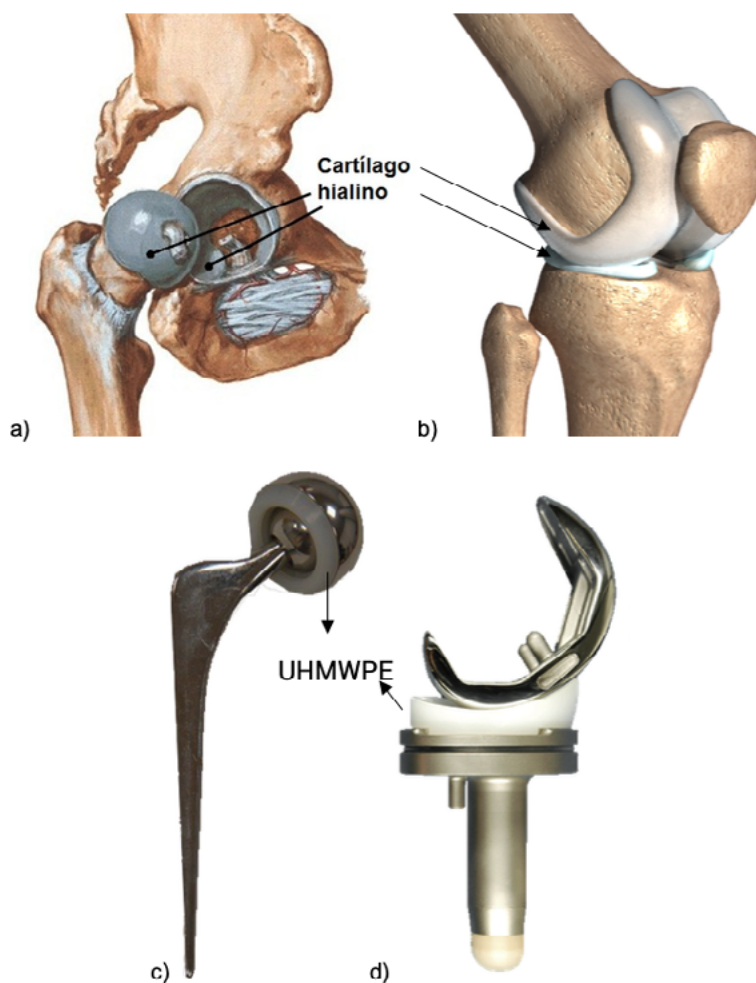
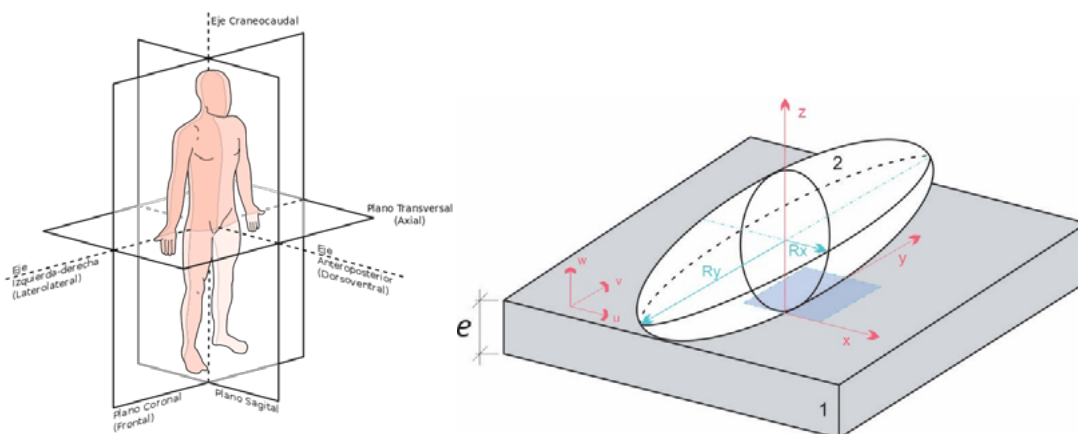


FIGURA 2 – a) Articulación natural de cadera. b) Articulación natural de rodilla. c) Prótesis de cadera. d) Prótesis de rodilla.



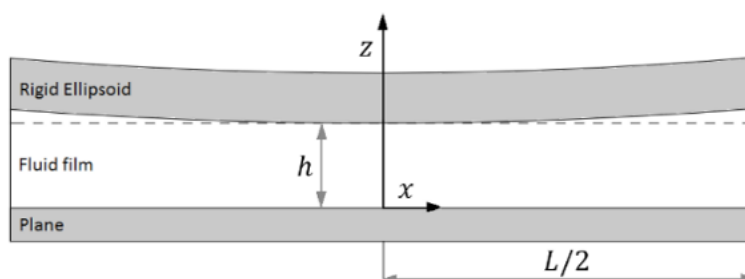
**FIGURA 3:** a) Planos anatómicos y ejes (Wikipedia, 2011). b) Modelo de elipsoide sobre plano, componentes del vector velocidad  $(u, v, w)$ , sistema de coordenadas y dominio (celestes),  $e$  es el espesor del prisma deformable,  $R_x$  y  $R_y$  son los radios principales del elipsoide.

### Ecuación de espesor de película lubricante

El espesor  $h$  (altura del canal de lubricación, Figura 4) de la película lubricante dependerá de la geometría de las superficies que delimitan el canal de flujo. En el caso del modelo EoPE, despreciando la aspereza de las superficies, en un estado indeformado,  $h$  será igual a la distancia instantánea entre el plano (fijo) y la superficie del elipsoide (móvil), la cual, con una precisión de segundo orden en  $x$  y  $y$ , está dada por  $h_{00}(t) + x^2/(2R_x) + y^2/(2R_y)$ , donde  $h_{00}$  es la menor distancia entre las superficies indeformadas (en  $x = y = 0$ ) en el instante de tiempo considerado. Adicionando el desplazamiento  $\delta_z$  (en dirección  $z$ ) en cada punto del plano deformable (cara superior del prisma) debido a la deformación del mismo, se obtiene la ecuación de altura del canal:

$$h(x, y, t) = h_{00}(t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \delta_z(x, y, t) \tag{1}$$

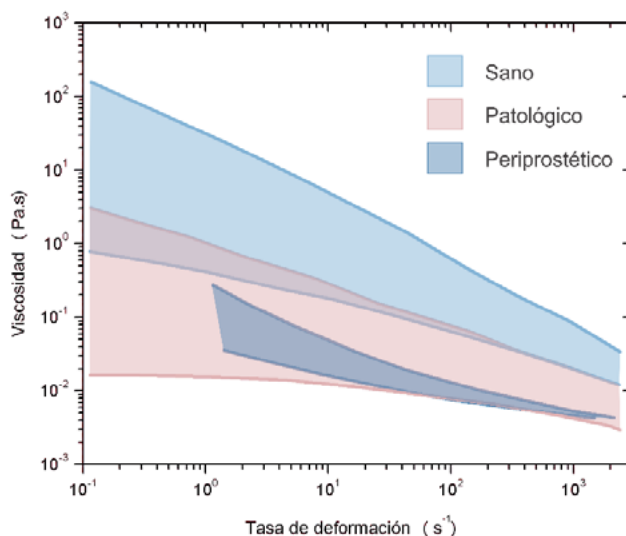
Note que el desplazamiento  $\delta_z$  previene la indentación del elipsoide en el plano deformable cuando  $h_{00}(t)$  es negativo.



**FIGURA 4.** Vista plano  $x$ - $z$ ,  $L$  es la longitud del dominio en dirección  $x$ ,  $h$  es el espesor de la película lubricante.

### Modelo reológico del fluido sinovial

Las macromoléculas presentes en el fluido sinovial (principalmente ácido hialurónico HA, del inglés *hyaluronic acid*) le confieren al mismo su característico comportamiento viscoelástico: a bajas tasas de corte las macromoléculas mantienen sus configuraciones aleatorias y deslizan entre sí resultando en un flujo viscoso en cambio, a altas tasas de corte, las cadenas de HA se deforman y alternativamente almacenan y liberan elásticamente energía mecánica (Fung, 1993). El gran tamaño de molécula e hidrofilia del HA contribuyen a retener fluido en la cavidad articular (Bou-Saïd, 2005). Además, el fluido sinovial es shear-thinning, es decir, su viscosidad disminuye con tasas de corte crecientes (ver Figura 5).



**FIGURA 5-** Viscosidad en función de la tasa de corte en líquido sinovial sano, periprostético y en articulaciones patológicas (osteoartrosis, artritis reumatoide). Modificada de (Cooke et al., 1978).

En la Figura 5 se observa que las patologías derivan en una disminución de la viscosidad (a igual tasa de corte) respecto al líquido sinovial extraído en articulaciones sanas (Cooke et al., 1978). Sin embargo, la viscosidad no es el único parámetro del fluido alterado. En articulaciones patológicas se ha encontrado una disminución en la concentración de HA, un aumento de proteínas respecto a articulaciones sanas, y una disminución del tiempo de relajación máximo del fluido (Fung, 2013; Ribitsch, 1990). Asimismo, Mazzucco et al. (2004) encontraron que la única diferencia entre muestras de líquido sinovial extraído de artroplastias y artroplastias de revisión es la baja concentración de HA en pacientes en revisión por motivos relacionados al desgaste del implante. En otras palabras, las patologías y los principales mecanismos que conducen a la falla del implante estarían asociados a una disminución en la concentración de HA y una pérdida de elasticidad del fluido sinovial.

A pesar de que el comportamiento no-newtoniano del fluido sinovial está bien documentado (Fung, 1993; Balazs, 1994; Rwei et al. 2008), suele modelarse como fluido newtoniano o newtoniano generalizado (utilizando por ejemplo los modelos de Cross o de Carreau), tanto en experimentos numéricos (Di Paolo et al. 2006; Liu, 2006; Wang, 2008; Mongkolwongrojn, 2010; Su et al., 2011) como en ensayos o experimentos físicos (Mattei, 2011; Mavraki y Cann, 2011). Incluso, es usual la utilización de viscosidades relativamente grandes para facilitar la convergencia de las soluciones numéricas (Su et al., 2011; Berli et al., 2009; Wang, et al. 2005; Liu et al., 2006; Weiss et al., 2015).

La interacción hidrodinámica entre las macromoléculas (principalmente HA) y el solvente (esencialmente plasma) modifica el flujo que se desarrollaría si el solvente se encontrara solo. En flujos viscoelásticos la presión  $p$  no tiene un significado físico obvio, sino que es el tensor de tensiones totales  $\pi$  quien ejerce la fuerza física. Este tensor se define como:

$$\boldsymbol{\pi} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de tensiones viscosas (también llamado tensor de tensiones “extra”) el cual está determinado por la cinemática del flujo y el modelo reológico. La ecuación constitutiva de Phan-Thien y Tanner (PTT), considerado como uno de los modelos más realistas para describir el comportamiento de soluciones poliméricas (Yousfi et al. 2013; Meziane et al. 2008; Li, 2013), describe  $\boldsymbol{\tau}$  en función del campo de velocidad del fluido  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{Z}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\boldsymbol{\tau} + \lambda\boldsymbol{\tau}_{(\hat{\mathbf{i}})} = -\eta_0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (3)$$

siendo el tensor tasa de deformación  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^\dagger$  y la derivada convectiva  $\boldsymbol{\tau}_{(\hat{\mathbf{i}})}\boldsymbol{\tau}_{(\hat{\mathbf{i}})}$ :

$$\boldsymbol{\tau}_{(\hat{\mathbf{i}})} = D\boldsymbol{\tau}/Dt - \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{L} - \mathbf{L}^\dagger\cdot\boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

donde  $D()/Dt$  es el operador derivada material y el tensor  $\mathbf{L}$  es el gradiente de velocidad “efectivo”. Las teorías de redes, de donde surge el modelo PTT, habitualmente consideran que las uniones de segmentos se mueven en forma “afín”, es decir, la deformación se distribuye en forma homogénea en el material y las uniones siguen exactamente el campo de velocidad macroscópico ( $\mathbf{v}$ ). Phan-Thien y Tanner introducen el tensor  $\mathbf{L}$  que corrige esta asunción (Bird et al., 1987):

$$\mathbf{L} = \nabla\mathbf{v} - \xi\dot{\boldsymbol{\gamma}}/2 \quad (5)$$

El parámetro  $\xi$  es una “constante de deslizamiento”, que microscópicamente puede considerarse como una representación del efecto de deslizamiento entre las moléculas de HA y el plasma (Meziane et al., 2008). Si  $\xi \neq 0$ , habrá una segunda diferencia de tensiones normales, lo cual se relaciona con la amplitud de las sobretensiones (Yousfi et al., 2013). Cuanto mayor sea  $\xi$ , las propiedades elásticas del fluido son más importantes. Resultados experimentales indican que  $\xi \leq 0.4$  y que  $\xi = 0.4$  conduce a espesores de película lubricante mayores (Ehret, 1993; Meziane et al., 2008).

La función  $\mathbf{Z}$  en la Ec. (3) contempla la creación y destrucción de segmentos de red que se produce en fluidos poliméricos al fluir. Esta función, adimensional, depende de la traza de  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\mathbf{Z}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = \exp\left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta}\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \quad (6)$$

y puede ser linealizada como sigue:

$$\mathbf{Z}(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = \mathbf{1} + \frac{\epsilon\lambda}{\eta}\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \quad (7)$$

En flujos de corte dominante, como en este caso, Phan-Thien y Tanner demostraron que el parámetro  $\epsilon$  es despreciable y  $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ , por lo que  $\mathbf{Z} \approx \mathbf{1}$ .

Incorporando las Ec. 4 y 5 en la Ec. 3, y asumiendo  $\mathbf{Z} \approx \mathbf{1}$ , se tiene una expresión alternativa de la ley constitutiva de PTT:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda\left(\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\boldsymbol{\tau}\right) - \frac{\lambda}{2}(2 - \xi)(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\dagger\cdot\boldsymbol{\tau}) + \frac{\lambda\xi}{2}(\boldsymbol{\tau}\cdot(\nabla\mathbf{v})^\dagger + \nabla\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}) = -\eta_0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (8)$$

Las variables dimensionales de la Ec. 8 se escalaron con las magnitudes características de la Tabla 1. La hipótesis de lubricación permite despreciar varios términos (Weiss, 2019), entre los cuales se elimina la dependencia de  $\boldsymbol{\tau}$  con respecto al tiempo, es decir, se pierde el “efecto de memoria” y  $\boldsymbol{\tau}$  depende sólo de los gradientes de velocidad actuales.



|                               |                        |
|-------------------------------|------------------------|
| Longitud en dirección $x_0y$  | L                      |
| Longitud en dirección $z$     | $h_0$                  |
| Tiempo                        | $L/U_2$                |
| Velocidad en dirección $x_0y$ | $U_2$                  |
| Velocidad en dirección $z$    | $\frac{h_0 U_2}{L}$    |
| Tensión                       | $\eta_0 U_2 / h_0$     |
| Tasa de deformación           | $U_2 / h_0$            |
| Carga                         | $\eta_0 U_2 L^2 / h_0$ |
| Viscosidad                    | $\eta_0$               |

Tabla 1- Magnitudes características para variables adimensionales.

A pesar de que las componentes de  $\tau$  pueden desacoplarse (Weiss, 2019), sus expresiones son no lineales y hacen que el tratamiento de estas ecuaciones sea complejo. Para encontrar una solución aproximada a este problema, se asumirá que el flujo viscoelástico del fluido sinovial se aproxima a un flujo de base newtoniano que sufre una perturbación no-newtoniana. Entonces, los cuadrados de los gradientes de velocidad a través del espesor de la película lubricante se aproximan a partir de los valores medios de los cuadrados de los gradientes de velocidad newtoniana.

$$\overline{\dot{\gamma}_x^2}(x, y, t) \equiv \frac{1}{h} \int_0^h \left( \frac{\partial u^N}{\partial z} \right)^2 dz \approx \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \tag{9}$$

$$\overline{\dot{\gamma}_y^2}(x, y, t) \equiv \frac{1}{h} \int_0^h \left( \frac{\partial v^N}{\partial z} \right)^2 dz \approx \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \tag{10}$$

$$\overline{\dot{\gamma}_x \dot{\gamma}_y}(x, y, t) \equiv \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial v^N}{\partial z} \frac{\partial u^N}{\partial z} dz \approx \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \tag{11}$$

siendo  $u^N$  y  $v^N$  componentes del campo de velocidades del problema análogo, considerando al fluido como newtoniano.

Las componentes de  $\tau$ , luego de realizar manipulaciones algebraicas (Weiss, 2019), se reducen a las siguientes expresiones:

$$\tau_{xx} \approx -(2 - \xi) \lambda \eta \overline{\dot{\gamma}_x^2} \tag{12}$$

$$\tau_{yy} \approx -(2 - \xi) \lambda \eta \overline{\dot{\gamma}_y^2} \tag{13}$$

$$\tau_{zz} \approx \xi \lambda \eta (\overline{\dot{\gamma}_x^2} + \overline{\dot{\gamma}_y^2}) \tag{14}$$

$$\tau_{xy} \approx -(2 - \xi) \lambda \eta \overline{\dot{\gamma}_x \dot{\gamma}_y} \tag{15}$$

$$\tau_{xz} \approx -\eta \frac{\partial u}{\partial z} \tag{16}$$

$$\tau_{yz} \approx -\eta \frac{\partial v}{\partial z} \tag{17}$$

donde

$$\eta \approx \frac{\eta_0}{1 + \lambda^2 \xi (2 - \xi) (\dot{\gamma}_x^2 + \dot{\gamma}_y^2)} \quad (18)$$

es la viscosidad aparente, cuya expresión matemática es similar al modelo de shear-thinning de Cross con nula viscosidad a tasa de deformación cero e índice de flujo igual a 2.

De las Ec. 12-15 y 18 se deduce que  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}$  y  $\eta$  son independientes de la coordenada  $z$ .

### Campo de velocidades newtoniano

Para determinar  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}$  y  $\eta$  es necesario conocer las componentes del campo de velocidades del problema análogo (con las mismas condiciones de frontera) considerando al fluido como newtoniano

( $u^N, v^N, w^N$ ). Puede demostrarse, a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento (asumiendo estado casi estacionario, fuerzas gravitacionales y de inercia despreciables, fluido isotérmico e incompresible), que:

$$u^N = \frac{1}{2\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial x} (z^2 - h^N z) + \frac{U_2 - U_1}{h} z + U_1 \quad (19)$$

$$v^N = \frac{1}{2\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial y} (z^2 - h^N z) + \frac{V_2 - V_1}{h} z + V_1 \quad (20)$$

donde  $h^N$  es el espesor de la película lubricante,  $p^N$  es el campo de presiones,  $\eta_0$  es la viscosidad del fluido,  $U_1 = u|_{z=0}$ ;  $V_1 = v|_{z=0}$ ;  $U_2 = u|_{z=h}$  y  $V_2 = v|_{z=h}$ .

Introduciendo las Ec. 19-20 en las Ec. 9-11 se tiene:

$$\widehat{\dot{\gamma}_x^2}(x, y, t) = \frac{h^{N2}}{12} \left( \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{U_2 - U_1}{h^N} \right)^2 \quad (21)$$

$$\widehat{\dot{\gamma}_y^2}(x, y, t) = \frac{h^{N2}}{12} \left( \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{V_2 - V_1}{h^N} \right)^2 \quad (22)$$

$$\widehat{\dot{\gamma}_x \dot{\gamma}_y}(x, y, t) = \frac{h^{N2}}{12\eta_0^2} \frac{\partial p^N}{\partial x} \frac{\partial p^N}{\partial y} + \frac{(U_2 - U_1)(V_2 - V_1)}{h^{N2}} \quad (23)$$

La ecuación diferencial que gobierna la distribución de presiones en un rodamiento de película fluida fue presentada por Reynolds en 1886 y se dedujo a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento y la ecuación de continuidad para un fluido isotérmico y newtoniano, despreciando los efectos inerciales y gravitacionales. En coordenadas cartesianas, la ecuación de Reynolds es la siguiente (Dowson, 1962):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^{N3}}{12\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h^{N3}}{12\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial y} \right\} = W_2 - W_1 + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{(U_1 - U_2)}{2} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{(V_1 - V_2)}{2} \quad (24)$$

Cabe aclarar que esta expresión asume que las velocidades de las superficies ( $U_1, U_2, V_1, V_2, W_1$  y  $W_2$ ) no dependen de las coordenadas  $x$  e  $y$ .

Siguiendo a Reynolds (1886), se definen las siguientes condiciones de frontera:

$U_1 = u_t, U_2 = u_f, V_1 = V_2 = W_1 = 0$  y  $W_2 = u_f \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}$ ; donde  $u_t$  es la velocidad del componente tibial (en el caso de articulación de rodilla) o del componente acetabular (en el caso de articulación de cadera

y  $u_f$  es la velocidad del componente femoral, ambas en dirección  $x$ . Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^{N^3}}{12\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h^{N^3}}{12\eta_0} \frac{\partial p^N}{\partial y} \right\} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_e \frac{\partial h}{\partial x} \tag{24}$$

donde  $u_e = \frac{(u_t + u_f)}{2}$  es la velocidad de arrastre (del término en inglés *entraining velocity*).

La presión ( $p^N$ ) y el espesor de película lubricante ( $h^N$ ) son simétricos respecto al plano  $x$ - $z$ . Por lo que, en el eje  $x$  ( $\Gamma_3$ , Figura 6) se impone una condición de simetría ( $\partial p^N / \partial y = 0$ ) que permite resolver las ecuaciones en la mitad del dominio real (que a su vez es un único cóndilo) reduciendo el costo computacional. En el resto de las fronteras, lejos de la zona de carga (que se encuentra en el centro del contacto), se imponen condiciones de frontera de Sommerfeld:  $p^N = 0$  en  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  (Figura 6). En el fenómeno de lubricación elastohidrodinámica con movimiento relativo de las superficies en las direcciones  $x$  o  $y$ , estas condiciones de frontera conducen a presiones sub-ambientales y oscilaciones en parte de la frontera del dominio (Weiss, 2015). Las presiones sub-ambientales generarían cavitación, lo cual no ocurre en articulaciones reales. Para evitarlas, se deben aplicar las condiciones de frontera de Reynolds (o de Swift-Steiber) que implican que la presión y su primera derivada son nulas ( $p^N = 0, \partial p^N / \partial x = 0, \partial p^N / \partial y = 0$  y  $\partial p^N / \partial y = 0, \partial p^N / \partial y = 0$ ) en una frontera cuya localización debe determinarse como parte del problema (frontera libre).

Para determinar de  $\widehat{\gamma}_x^2, \widehat{\gamma}_y^2$  y  $\widehat{\gamma}_x \widehat{\gamma}_y$  (Ec. 21-23) es necesario encontrar las dos incógnitas  $h^N$  y  $p^N$  en la ecuación de Reynolds (Ec. 25) mediante la solución simultánea del sistema de ecuaciones no lineales conformado por la Ec. 25, la ecuación de altura del canal de lubricación ( $h^N(x, y, t) = h_{00}^N(t) + x^2 / (2R_x) + y^2 / (2R_y) + \delta_z^N(x, y, t)$ , en el modelo EoP) y un modelo de deformación del prisma deformable, con sus correspondientes condiciones de frontera.

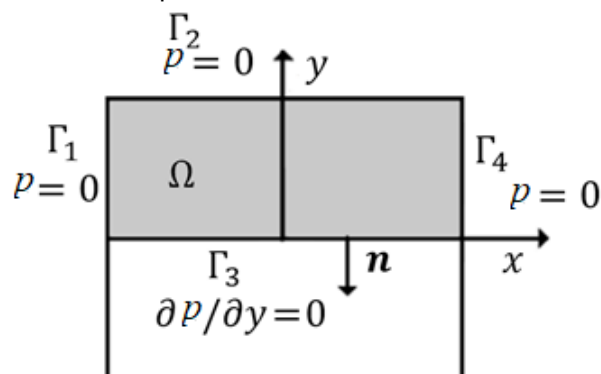


FIGURA 6: Dominio ( $\Omega$ , en gris) simétrico respecto a eje  $x$ , y condiciones en las fronteras:  $p^N = 0$  en las fronteras  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_4$ ,  $\partial p^N / \partial y = 0$  (simetría) en  $\Gamma_3$ .

**Ecuación modificada de Reynolds**

Como se mencionó previamente, en fluidos viscoelásticos, es el tensor de tensiones totales  $\pi$  quien ejerce la fuerza física a través de su componente normal ( $\pi_{zz}$ ), por lo que se deduce una ecuación de Reynolds modificada (a partir de la ecuación de continuidad, asumiendo estado cuasi-estacionario y fluido isotérmico e incompresible):

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{h^3}{12\eta} \left( \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial x} - b_1 \right) \right] + \frac{d}{dy} \left[ \frac{h^3}{12\eta} \left( \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial y} - b_2 \right) \right] = W_2 - W_1 + \frac{dh}{dx} \left[ \frac{U_1 - U_2}{2} \right] + \frac{dh}{dy} \left[ \frac{V_1 - V_2}{2} \right] \quad (26)$$

que, al incorporar las condiciones de frontera  $U_1 = u_e, U_2 = u_f, V_1 = V_2 = W_1 = 0$  y  $W_2 = u_f \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}$ , se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{12\eta} \left( \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial x} - b_1 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h^3}{12\eta} \left( \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial y} - b_2 \right) \right\} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_e \frac{\partial h}{\partial x} \quad (27)$$

donde  $u_e = \frac{(u_e + u_f)}{2}$  es la velocidad de arrastre (*entraining velocity*),

$$b_1 = \lambda \frac{\partial(\xi \eta \widehat{\gamma}_y^2 + 2\eta \widehat{\gamma}_x^2)}{\partial x} + (2 - \xi) \lambda \frac{\partial \eta \widehat{\gamma}_x \widehat{\gamma}_y}{\partial y} \quad (28)$$

$$b_2 = (2 - \xi) \lambda \frac{\partial \eta \widehat{\gamma}_x \widehat{\gamma}_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial(\eta \xi \widehat{\gamma}_x^2 + 2\eta \widehat{\gamma}_y^2)}{\partial y} \quad (29)$$

La componente normal del tensor total de tensiones ( $\pi_{zz}$ ) y el espesor de película lubricante ( $h$ ), incógnitas del problema, son simétricos respecto al plano x-z. Al igual que para el caso newtoniano, se impone una condición de simetría ( $\partial \pi_{zz} / \partial y = 0$ ) en el eje x ( $\Gamma_3$ , Figura 7) que permite resolver las ecuaciones en la mitad del dominio y reducir el costo computacional. Las condiciones de frontera apropiadas para ser aplicadas en el resto de las fronteras, lejos de la zona de carga (en  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_4$ , Figura 7), genera controversias hasta el momento (Li, 2013). Muchos autores asumen que  $\pi_{zz}$  es igual a una presión de referencia en dichas fronteras, es decir, consideran condiciones de frontera de Sommerfeld. No hay razón física obvia para hacer esto, ya que en flujos viscoelásticos la presión puede variar a través del espacio entre las superficies en contacto (Sawyer y Tichy, 1998). Sin embargo, la falta de consenso sobre la condición de frontera apropiada, la atractiva simplicidad de las condiciones de frontera de Sommerfeld (que ha sido utilizada en numerosos trabajos publicados) y la independencia de  $\tau_{zz}$  y p respecto a la coordenada z, justifican el uso de esta condición de frontera.

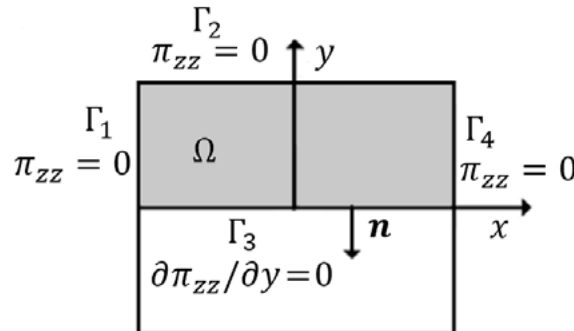


FIGURA 7: Dominio ( $\Omega$ , en gris) simétrico respecto a eje  $x$ , y condiciones en las fronteras:  $\pi_{zz} = 0$  en las fronteras  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_4$ ,  $\partial \pi_{zz} / \partial y = 0$  (simetría) en  $\Gamma_3$ .

### Modelo de deformación de superficies en contacto

El espesor de película lubricante dependerá de la deformación que sufra el material deformable. Particularmente, en el modelo EoP, se asume al elipsoide como rígido y el prisma adopta las características mecánicas del material deformable. Aquí, encontrar el desplazamiento  $\delta_z$  (en dirección  $z$ ) en cada punto de la cara superior del prisma (en contacto con el fluido) debido a la deformación del mismo, requiere resolver, con apropiadas condiciones de frontera, la ecuación que describe el estado de equilibrio estático de cada elemento diferencial del prisma:

$$-\nabla \cdot \sigma = F_v \quad (30)$$

donde  $\sigma$  es un tensor cuyas componentes son las tensiones actuantes sobre el elemento diferencial y  $F_v$  es el vector de fuerzas de volumen aplicadas al elemento diferencial.

La relación entre las tensiones ( $\sigma$ ) y las deformaciones ( $\epsilon$ ) está dada por una ecuación constitutiva.

Tanto el cartílago hialino (en las articulaciones naturales de rodilla y cadera), como el polietileno de ultra alto peso molecular (UHMWPE, del inglés *ultra-high-molecular-weight-polyethylene*) presente en el componente tibial (en rodilla) o acetabular (en cadera) de las prótesis más frecuentes (de tipo MoP, del inglés *metal-on-polyethylene*), son materiales viscoelásticos, es decir, su respuesta depende de la tensión generada sobre los mismos y del tiempo que permanecen cargados.

Algunos materiales viscoelásticos pueden aproximarse como sólidos elásticos lineales cuando son sometidos a condiciones de carga determinadas, ante pequeñas deformaciones y rangos de temperatura acotados. Esto motivó la utilización de las ecuaciones de elasticidad lineal (de más sencilla resolución) en la mayoría de los trabajos previos vinculados a lubricación en articulaciones sinoviales (Berli, 2010; Weiss et al., 2015; Weiss et al., 2019). En estos trabajos se desprecian las fuerzas de volumen (como la fuerza gravitatoria) y se considera que el prisma es un sólido isótropo y homogéneo, en el cual la relación entre las tensiones ( $\sigma$ ) y las deformaciones ( $\epsilon$ ) es lineal y está dada por la ecuación constitutiva de Lamé-Hooke:

$$\sigma = C:\epsilon \quad (31)$$

donde  $C$  es la matriz de compliancia definida a partir del módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ , siendo  $E$  y  $\nu$  constantes elásticas linealmente independientes. Además, se asume que el prisma está sometido a pequeñas deformaciones, por lo que éstas y los desplazamientos ( $\delta = \delta_x \mathbf{i} + \delta_y \mathbf{j} + \delta_z \mathbf{k}$ ) se relacionan linealmente de la siguiente forma:

$$\epsilon = \frac{1}{2} [(\nabla \delta)^\dagger + (\nabla \delta)] \quad (32)$$

Por otro lado, hay autores que simplemente ignoran la capacidad de deformación del cartílago o del UHMWPE (Yousfi et al., 2013), asumiendo superficies rígidas.

Para la resolución del problema de deformación es necesario además establecer condiciones de frontera. Weiss et al. (2018, 2019) asumen, en el modelo EoPE (elipsoide sobre plano con prisma sólido elástico lineal), la cara inferior del prisma fija ( $\delta = 0$ ), la cara superior (en contacto con el fluido) sometida a  $\pi_{zz}$  (o  $p^N$  en el caso del problema análogo con fluido newtoniano), y las caras restantes se encuentran libres de tensiones ( $\nabla \cdot \sigma = 0$ ).

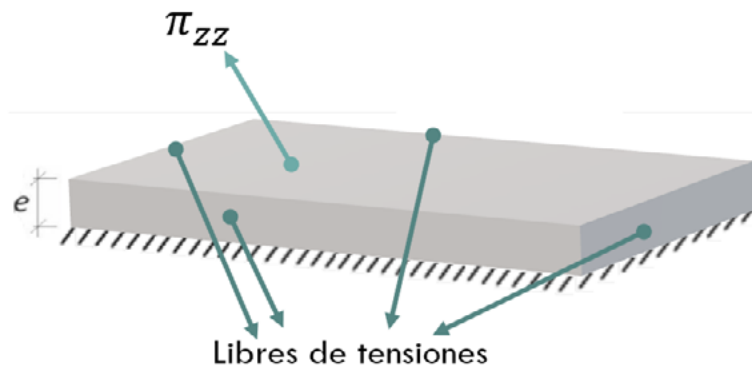


FIGURA 8: Prisma deformable, dimensiones y condiciones de frontera: cara inferior fija, cara superior (en contacto con fluido) sometida a  $\pi_{zz}$ , caras restantes libres de tensiones.

### Cargas aplicadas

La capacidad de carga ( $W^N$ ) de la película lubricante en el caso de un fluido newtoniano se obtiene al integrar el campo de presiones en el dominio ( $\Omega$ ):

$$W^N(t) = \int_{\Omega} p^N(t) d\Omega \quad (33)$$

Sin embargo, como se mencionó previamente, en fluidos viscoelásticos, es el tensor de tensiones totales  $\pi$  quien ejerce la fuerza física, por lo que la capacidad de carga ( $W$ ) de la película lubricante se obtiene al integrar la componente normal del tensor de tensiones ( $\pi_{zz}$ ) en el dominio ( $\Omega$ ):

$$W(t) = \int_{\Omega} \pi_{zz}(t) d\Omega \quad (34)$$

Para estimar si las cargas obtenidas son razonables, es preciso relacionar la misma con la masa corporal de la persona ( $MC$ ). Tanto en la articulación de rodilla como en la articulación de cadera, la fuerza máxima promedio que soporta una articulación de miembro inferior cuando una persona camina o sube escaleras es aproximadamente 3 veces su masa corporal (Kutzner et al. 2010; Kennedy et al., 2013; Bergmann et al., 2001).

En ambas articulaciones (de cadera y rodilla), dada la simetría respecto al plano  $x - z$ , se resuelven las ecuaciones en la mitad de la zona de carga de cada modelo. Se debe tener presente que el modelo EoP en el caso de la articulación de rodilla corresponde a un único (de dos) cóndilo femoral, por lo que la carga calculada de acuerdo a la Ec. (34) corresponde a un cuarto de la fuerza aplicada

$$W_{rod} = \frac{MC(kg) \cdot 3 \cdot 9.8(m/s^2)}{4} \quad (35)$$

En cambio, el modelo BoP utilizado para articulación de cadera, corresponde a la articulación completa, por lo que la carga calculada de acuerdo a la Ec. (34) corresponde a la mitad de la fuerza aplicada

$$W_{cad} = \frac{MC(kg) \cdot 3 \cdot 9.8(m/s^2)}{2} \quad (36)$$

### Método de solución

La resolución del problema de interés mediante un abordaje analítico sólo es posible realizando numerosas hipótesis simplificadoras que conducen a estimaciones poco realistas (Weiss, 2019). Esto motiva el uso del Método de Elementos Finitos (MEF), el cual permite obtener una solución aproximada a problemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales.

La idea detrás del método consiste en discretizar el dominio del problema (geometría en la cual son aplicables las ecuaciones gobernantes), dividiéndolo en porciones finitas denominadas elementos y conectados mediante nodos. El conjunto de nodos y sus relaciones de adyacencia se denomina malla. En cada elemento se plantean funciones de aproximación de las variables a resolver (como por ejemplo  $\pi_{zz}$ ). Reemplazando, en las ecuaciones a resolver, la solución exacta por una solución aproximada, se genera un residuo. El objetivo es encontrar una solución aproximada, mediante la evaluación de los residuos ponderados, buscando que los mismos sean nulos.

El Grupo Biomecánica Computacional ha desarrollado algoritmos con programación propia para la resolución de problemas de lubricación en 1 y 2 dimensiones basados en el método de elementos finitos (Weiss et al., 2015; Di Paolo et al., 2006), sin embargo, la utilización de software con licencia, como COMSOL Multiphysics, presenta algunas ventajas:

- Permite resolver problemas multifísicos, acoplando interfases de usuario basadas en problemas convencionales de física (como la resolución de las ecuaciones de elasticidad lineal) y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales (que permiten al usuario definir y resolver ecuaciones como la Ecuación de Reynolds modificada, Ec. 27).
- Los resolvedores (del término en inglés solvers) son estables y confiables.
- Es posible realizar mallas adaptativas basadas en la estimación del error, de forma tal de tener mayor cantidad de elementos en zonas donde es necesario tener resultados más precisos, pero sin tener una excesiva cantidad de elementos (en zonas de bajo interés) que incrementen innecesariamente el costo computacional.
- La interfase gráfica es de fácil uso.

En Weiss et al. (2018, 2019) se detalla la metodología de resolución de las ecuaciones gobernantes del problema de lubricación de película delgada en articulaciones naturales y protésicas de rodilla utilizando COMSOL Multiphysics. El procedimiento empleado consiste en:

1. Resolver el problema análogo newtoniano: es decir resolver en forma simultánea la ecuación de Reynolds (Ec. 25), la ecuación de espesor de película lubricante y la ecuación de equilibrio en el prisma deformable (con la superficie superior sometida a la presión  $p^N$ ). La resolución de este problema conduce a encontrar las incógnitas  $p^N$  y  $h^N$ .
2. Determinar  $\bar{\gamma}_x^2$ ,  $\bar{\gamma}_y^2$  y  $\bar{\gamma}_x\bar{\gamma}_y$  (que dependen de  $p^N$  y  $h^N$  de acuerdo a las Ec. 21-23). Luego, determinar  $b_1$ ,  $b_2$  y  $\eta$  (Ec. 28-29 y 18).
3. Resolver el problema de interés (con fluido PTT): es decir resolver en forma simultánea la ecuación de Reynolds modificada (Ec. 27), la ecuación de espesor de película lubricante (Ec. 1) y la ecuación de equilibrio en el prisma deformable (Ec. 30, con la superficie superior sometida a  $\pi_{zz}$ ). La resolución de este problema conduce a encontrar las incógnitas  $\pi_{zz}$  y  $h$ .

### Posprocesado

A partir de los resultados es posible calcular los coeficientes de fricción sobre las superficies articulares, factor que orientará la selección de los parámetros físicos, geométricos y operativos más convenientes.

### Resultados alcanzados

Los resultados de la investigación científica financiada con este PID han dado lugar a

#### a. Publicaciones en revistas científicas internacionales

- Weiss, B.A., Bou-Saïd, B., Ubal, S. y Di Paolo, J. "The Phan-Thien and Tanner model applied to the lubrication of knee prostheses". Journal of Biomechanical Engineering (ASME). En prensa. 2019.
- Marinelli, F., Weiss, B.A., Berli, M.E. y Di Paolo, J. Módulos elásticos equivalentes para predicción de deformaciones en articulaciones. Ingenius (pISSN: 1390-650X / eISSN: 1390-860X) N°20, pp. 70-82. 2018.

#### **b. Publicaciones de artículo completo en memorias de congresos con referato**

- Weiss, B.A., Ubal, S. y Di Paolo, J. Lubricación por aplastamiento en articulación natural de rodilla con fluido sinovial no newtoniano. *Mecánica Computacional* (ISSN 2591-3522) Vol XXX-VI, pp. 1855-1864. XII Congreso Argentino de Mecánica Computacional, Tucumán, Noviembre de 2018
- Franco Marinelli, Brenda Weiss y José Di Paolo. "Biomecánica de contacto en prótesis de rodilla. Una actividad de simulación para la formación de becarios". Congreso Latinoamericano de Ingeniería (CLADI), Paraná, Septiembre de 2017.
- Weiss, B.A., Berli, M.E., Ubal, S. y Di Paolo, J. Numerical solution of a 2D lubrication model with Sommerfeld boundary conditions for hip prostheses. *IFMBE Proceedings*. Springer. 2015 Vol. 49, pp. 876-879. ISSN 1680-0737. 2015.

#### **c. Publicaciones de resumen en memorias de congresos con referato**

- Brenda Weiss, Sebastián Ubal y José Di Paolo. "Lubricación en prótesis de rodilla: líquido sinovial modelado como fluido de Phan-Thien and Tanner", publicado en las memorias del IV Congreso Argentino de Microfluídica Argentina, 30-31 de octubre de 2017, Paraná, Argentina.

#### **d. Reuniones de divulgación científica**

- Weiss Brenda A., Ubal Sebastián y Di Paolo, José. "Modelo de lubricación para prótesis de cadera con condiciones de contorno de Sommerfeld". 6tas. Jornadas de Difusión de Proyectos de Investigación, Extensión y Actividades Académicas de la UNER (Jornadas INEXA), Concordia, Noviembre de 2015.
- Brenda Weiss, Sebastián Ubal, José Di Paolo. El modelo de Phan-Thien y Tanner aplicado a la lubricación por aplastamiento en prótesis de rodilla. XV Reunión de fluidos y sus aplicaciones. Buenos Aires, Argentina, 2018.
- Brenda Weiss, Sebastián Ubal, José Di Paolo. Lubricación por aplastamiento en articulación natural de rodilla. 9nas. Jornadas Académicas y Científicas del Dpto. Físico Química. Oro Verde, Argentina, 2018.
- Robledo Blasco, Leandro; Berli, Marcelo; Weiss, Brenda; Di Paolo, José. Investigaciones sobre modelos teórico-computacionales de lubricación visco-elasto-hidrodinámica. 9nas. Jornadas Académicas y Científicas del Dpto. Físico Química. Oro Verde, Argentina, 2018.

### **Síntesis de resultados y conclusiones**

#### **1. Solución numérica de modelo de lubricación 2D con condiciones de frontera de Sommerfeld para prótesis de cadera.**

Para el estudio de la lubricación EHD en prótesis de cadera se adoptó un modelo geométrico equivalente de tipo BoP, en donde el componente femoral se asume no deformable y el componente acetabular deformable y con la capacidad de exudar (o absorber) líquido cuando se comprime (o se expande), en forma análoga al cartilago articular. Se modificó la ecuación de Reynolds (Ec. 25) para contemplar este mecanismo de exudación y se asume estado cuasi-estacionario despreciando el término de aplastamiento de la película lubricante en dicha ecuación. El desplazamiento que sufre cada punto de la superficie deformable, se obtiene a partir del modelo de columna y es proporcional a la presión ejercida por el fluido sinovial (modelado como fluido Newtoniano). Las ecuaciones gobernantes se resolvieron utilizando un código computacional con algoritmo de programación propia, basado en el método de elementos finitos, el método de Newton y la continuación paramétrica. El mecanismo de lubricación simulado corresponde a la lubricación elasto-hidrodinámica, predominante en la fase de apoyo del



ciclo de marcha, en el cual existe una velocidad relativa entre las superficies articulares en dirección tangencial a las mismas.

La baja rigidez y porosidad del material deformable analizado contribuye a una mejor distribución de carga y a espesores de película lubricante mayores, reduciendo los esfuerzos normales que causan la fatiga del material. Dada la disminución del coeficiente de fricción observada al incrementar el factor de exudación, el mecanismo de exudación contribuiría a la reducción del desgaste de la prótesis.

Se predicen presiones sub-ambientales y con oscilaciones en parte de la frontera del dominio, evidenciando la necesidad de condiciones de contorno más realistas (de tipo Reynolds) en una frontera cuya localización debe determinarse como parte del problema (frontera libre).

Los resultados mencionados se presentan en el artículo “Numerical solution of a 2D lubrication model with Sommerfeld boundary conditions for hip prostheses” publicado en IFMBE Proceedings (Weiss et al., 2015).

## 2. Aplastamiento de película lubricante en prótesis de rodilla con fluido de Phan-Thien y Tanner

Yousfi et al. (2013) resolvieron, analíticamente, un modelo de aplastamiento de fluido lubricante en prótesis de rodilla, en el cual las superficies articulares se aproximan a velocidad constante. Este modelo es de tipo PoP, axisimétrico, con superficies rígidas, y el fluido sinovial es considerado como fluido de PTT. Para comparar con estos resultados, se resolvió, numéricamente, el modelo descrito en secciones previas (EoP, fluido PTT) asumiendo  $R_x = R_y \gg L, u_e = 0$  y  $\delta = 0$ , encontrándose un excelente acuerdo entre resultados.

Posteriormente se resolvió el modelo EoP asumiendo las superficies articulares rígidas (EoPR,  $\delta = 0$ ), pero contemplando la curvatura del cóndilo femoral y del platillo tibial. Se obtuvieron resultados para distintos números adimensionales de Weissenberg  $W_e$ , el cual cuantifica la importancia relativa entre las fuerzas elásticas y viscosas en el fluido. Los resultados se compararon con los obtenidos previamente (PoP con superficies rígidas). Se concluyó que un modelo de tipo EoP es necesario para obtener información cuantitativa, al menos para delimitar el dominio en donde debiera resolverse el modelo PoP.

Finalmente, se resolvió el modelo EoP incluyendo la deformación de las superficies articulares (EoPE) encontrándose valores de carga y espesor de película lubricante consistentes con los observados en articulaciones de rodilla. Además, este modelo, en comparación con EoPR y PoP, es el único que captura la esperada disminución del coeficiente de fricción al aumentar la naturaleza elástica del fluido sinovial (característica de articulaciones sanas y jóvenes).

Asimismo, se deriva de los resultados que asumir al fluido sinovial como Newtoniano conduce a espesores de película lubricante superiores que los obtenidos al considerar al fluido como fluido de PTT. Por lo tanto, las predicciones realizadas a partir del modelo propuesto (EoPE y fluido PTT) serían predicciones más seguras, puesto que el espesor de película lubricante no sería sobreestimado.

Los resultados mencionados se encuentran en el artículo “The Phan-Thien and Tanner model applied to the lubrication of knee prostheses”, aprobado para su publicación en el Journal of Biomechanical Engineering (Weiss et al., 2019).

## 3. Aplastamiento de película lubricante en articulación natural de rodilla

El envejecimiento y las patologías más frecuentes asociadas a la rodilla provocan al mismo tiempo una disminución del espesor del cartilago articular y una pérdida de elasticidad del fluido (Jahn et al., 2016). Para evaluar la influencia de dichos parámetros en el detrimento del comportamiento tribológico de una articulación natural de rodilla, se resolvieron las ecuaciones gobernantes del modelo EoPE considerando al fluido sinovial como fluido de PTT y asumiendo que el prisma deformable tenía un espesor variable (1,7 y 2,6 mm) y características mecánicas constantes acordes al cartilago hialino (Shepherd and Seedhom, 1999).

Los resultados obtenidos son cuantitativamente consistentes con lo que cabría de esperar en articulaciones de este tipo. El coeficiente de fricción disminuye con número de Weissenberg ( $We$ ) creciente, como cabría de esperar dado que las articulaciones sanas y jóvenes son las que poseen mayor  $We$ . La pérdida de elasticidad del fluido sinovial tendría un efecto mayor en el detrimento del desempeño tribológico, en comparación con la disminución del espesor del cartílago articular.

Al igual que en articulaciones protésicas, asumir al fluido sinovial como newtoniano conduce a espesores de película lubricante mayores a los que en realidad se producirían, por lo tanto, las predicciones realizadas a partir de estos resultados serían menos conservadoras.

Los resultados mencionados se presentan en el artículo "Lubricación por aplastamiento en articulación natural de rodilla con fluido sinovial no newtoniano" publicado en la revista *Mecánica Computacional* (Weiss et al., 2018).

#### 4. Predicción de deformaciones

La resolución de las ecuaciones de elasticidad lineal asociada a modelos en 2 o 3 dimensiones frecuentemente conlleva un elevado costo computacional, por lo que generalmente se recurre a modelos más simples para predecir las deformaciones. Para evaluar la validez de dichas predicciones, se comparan los resultados obtenidos a partir de la solución numérica de las ecuaciones de elasticidad lineal (utilizando un software comercial basado en el método de elementos finitos), y aquellos obtenidos al utilizar el modelo de columna (para material de pequeño espesor) o el de sólido semi-infinito. Dado que este trabajo se planteó como una actividad de formación inicial de un becario de iniciación a la investigación, el fenómeno en estudio fue el contacto seco y estático (aplicando una carga Hertziana) en articulaciones naturales y protésicas de rodilla (contacto lineal en modelo CoP) y cadera (contacto puntual en modelo BoP) de tipo MoP.

Los resultados indican que el modelo de columna para material de pequeño espesor podría ser una buena aproximación para articulaciones naturales dado que conduce a diferencias porcentuales inferiores al 5% (menor al 5% en el caso de cadera, menor al 1% en el caso de rodilla). Dado que el espesor del material deformable en el caso de articulaciones protésicas es mayor, la aproximación de sólido de pequeño espesor ya no resulta tan satisfactoria (diferencia porcentual menor al 23.3% en cadera, y del 15% en rodilla). Sin embargo, tanto en articulaciones naturales como artificiales, el modelo de columna arroja sub-estimaciones de los desplazamientos, poniendo el análisis del lado de la seguridad. El resto de los modelos de deformación analizados no son satisfactorios.

Estos resultados se encuentran en el artículo "Módulos elásticos equivalentes para predicción de deformaciones en articulaciones" (Marinelli et al., 2018); y en el artículo "Biomecánica de contacto en prótesis de rodilla. Una actividad de simulación para la formación de becarios" (Marinelli et al., 2017).

Como se mencionó previamente, tanto el cartílago hialino como el polietileno de ultra alto peso molecular, si bien suelen aproximarse como sólidos elásticos lineales, en realidad presentan un comportamiento viscoelástico. Como actividad de formación para un becario EVC-CIN, se planteó la solución numérica de modelo de lubricación 1D con condiciones de frontera de Reynolds y material deformable viscoelástico (considerado como sólido estándar lineal y como sólido de Voigt). El modelo es válido sólo para prótesis de rodilla y su resolución pretende contribuir a determinar la importancia de incluir en el modelado el comportamiento viscoelástico del cartílago hialino o UHMWPE (Robledo Blasco et al., 2018).

#### Referencias

- BALAZS, EA, 1974. The physical properties of synovial fluid and the special role of hyaluronic acid. *Disorders of the Knee* 2, 63–75.
- BERGMANN, G., Deuretzbacher, G., Heller, M., Graichen, F., Rohlmann, A., Strauss, J., Duda, G.N., 2001. Hip contact forces and gait patterns from routine activities. *J Biomech* 34, 859–871.

- BERLI, M., Campana, D., Ubal, S., Di Paolo, J., 2009. Lubrication model of a knee prosthesis, with non Newtonian fluid and porous rough material. *Latin American applied research* 39, 105–111.
- BERLI, M.E., 2010. Solución numérica de un modelo de lubricación visco-elastohidrodinámica de prótesis de rodilla (Tesis de Magíster en Tecnología Química). Universidad Nacional del Litoral.
- BIRD, R. B., Armstrong, R.C., Hassager, O., 1987. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1, 2nd Ed. : Fluid mechanics, 2nd ed.
- BIRD, R. Byron, Curtiss, C.F., Armstrong, R.C., Hassager, O., 1987. Dynamics of Polymeric Liquids, Volume 2: Kinetic Theory, 2nd ed. Wiley-Interscience, New York.
- BOU-SAÏD, B., 2005. A new modeling of human joint lubrication subject to shock loading. *Revue Européenne des Éléments* 14, 397–420. <https://doi.org/10.3166/reef.14.397-420>
- BOZIC, K.J., Ries, M.D., 2005. Wear and Osteolysis in Total Hip Arthroplasty. *Seminars in Arthroplasty* 16, 142–152. <https://doi.org/10.1053/j.sart.2005.05.003>
- CARR, B.C., Goswami, T., 2009. Knee implants : Review of models and biomechanics. *Materials & design* 30, 398–413.
- COOKE, A.F., Dowson, D., Wright, V., 1978. The rheology of synovial fluid and some potential synthetic lubricants for degenerate synovial joints. *Engineering in Medicine* 7, 66–72.
- DAVIM, J.P., 2013a. *Biotribology*. Wiley, London.
- DAVIM, J.P., 2013b. *Biomaterials and medical tribology: research and development*.
- DI PAOLO, J., Berli, M.E., 2006. Numerical analysis of the effects of material parameters on the lubrication mechanism for knee prosthesis. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 9, 79–89. <https://doi.org/10.1080/10255840500523139>
- DOWSON, D., 1962. A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication. *International Journal of Mechanical Sciences* 4, 159–170. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(62\)80038-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80038-1)
- EHRET, P., 1993. Contribution à l'étude du comportement de mécanismes lubrifiés sous chargements transitoires. INSA, Lyon.
- FUNG, Y.C., 1993. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer Science & Business Media.
- JIN, Z.M., Dowson, D., Fisher, J., 1995. Contact Pressure Prediction in Total Knee Joint Replacements Part 1: General Elasticity Solution for Elliptical Layered Contacts. *Proceedings of the IMechE* 209, 1–8. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1995\\_209\\_311\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1995_209_311_02)
- KENNEDY, F.E., Wongseedakaew, K., McHugh, D.J., Currier, J.H., 2013. Tribological conditions in mobile bearing total knee prostheses. *Tribology International, The International Conference on BioTribology* 2011 63, 78–88. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2012.03.011>
- KNAHR, K., European Federation of National Associations of Orthopaedics and Traumatology, Congress, 2011. *Tribology in total hip arthroplasty*. Springer, Heidelberg.
- KUTZNER, I., Heinlein, B., Graichen, F., Bender, A., Rohlmann, A., Halder, A., Beier, A., Bergmann, G., 2010. Loading of the knee joint during activities of daily living measured in vivo in five subjects. *J Biomech* 43, 2164–2173. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2010.03.046>
- LI, X.K., 2013. Non-Newtonian lubrication with the Phan-Thien–Tanner model. *J Eng Math* 87, 1–17. <https://doi.org/10.1007/s10665-013-9666-1>
- LIU, F., Jin, Z.M., Hirt, F., Rieker, C., Roberts, P., Grigoris, P., 2006. Transient elastohydrodynamic lubrication analysis of metal-on-metal hip implant under simulated walking conditions. *J Biomech* 39, 905–914. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2005.01.031>
- LUGT, P.M., Morales-Espejel, G.E., 2011. A Review of Elasto-Hydrodynamic Lubrication Theory. *Tribology Transactions* 54, 470–496. <https://doi.org/10.1080/10402004.2010.551804>
- MARINELLI, F., Weiss, B., Di Paolo, J., 2017. Biomecánica de contacto en prótesis de rodilla. Una actividad de simulación para la formación de becarios. Congreso Latinoamericano de Ingeniería (CLADI).

- MARINELLI, F., Weiss, B.A., Berli, M., Di Paolo, J., 2018. Módulos elásticos equivalentes para predicción de deformaciones en articulaciones. *Ingenius* 20, 70–82.
- MATTEI, L., Di Puccio, F., Piccigallo, B., Ciulli, E., 2011. Lubrication and wear modelling of artificial hip joints: A review. *Tribology International* 44, 532–549. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2010.06.010>
- MAVRAKI, A., Cann, P.M., 2011. Lubricating film thickness measurements with bovine serum. *Tribology International, Special Issue: ECOTRIB 2009* 44, 550–556. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2010.07.008>
- MAZZUCCO, D., Scott, R., Spector, M., 2004. Composition of joint fluid in patients undergoing total knee replacement and revision arthroplasty: correlation with flow properties. *Biomaterials* 25, 4433–4445. <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2003.11.023>
- MEZIANE, A., Bou-Saïd, B., Tichy, J., 2008. Modelling human hip joint lubrication subject to walking cycle. *Lubrication Science* 20, 205–222. <https://doi.org/10.1002/ls.58>
- MONGKOLWONGROJN, M., Wongseedakaew, K., Kennedy, F.E., 2010. Transient elastohydrodynamic lubrication in artificial knee joint with non-Newtonian fluids. *Tribology International, Special Issue on Second International Conference on Advanced Tribology (iCAT2008)* 43, 1017–1026. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2009.12.041>
- PIVEC, R., Johnson, A.J., Mears, S.C., Mont, M.A., 2012. Hip arthroplasty. *Lancet* 380, 1768–1777. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(12\)60607-2](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(12)60607-2)
- RAMACHANDRAN, M., 2006. *Basic Orthopaedic Sciences: The Stanmore Guide*. CRC Press.
- RIBITSCH, V.O., 1990. Viscoelastic behaviour of synovial fluids and artificial replacements., in: *Biomechanics of Diarthrodial Joints*. Springer-Verlag New York.
- ROBLEDO BLASCO, L., Berli, M., Weiss, B. Di Paolo, J., 2018. Investigaciones sobre modelos teórico-computacionales de lubricación visco-elasto-hidrodinámica. 9nas. Jornadas Académicas y Científicas del Dpto. Físico Química.
- RWEI, S.-P., Chen, S.-W., Mao, C.-F., Fang, H.-W., 2008. Viscoelasticity and wearability of hyaluronate solutions. *Biochemical Engineering Journal* 40, 211–217. <https://doi.org/10.1016/j.bej.2007.12.021>
- SAWYER, W.G., Tichy, J.A., 1998. Non-Newtonian Lubrication With the Second-Order Fluid. *J. Tribol* 120, 622–628. <https://doi.org/10.1115/1.2834596>
- SHARKEY, P., Hozack, W.J., Rothman, R.H., Shastri, S., Jacoby, S.M., 2002. Why Are Total Knee Arthroplasties Failing Today? : *Clinical Orthopaedics and Related Research*. *Clinical Orthopaedics and Related Research* 404, 7–13. <https://doi.org/10.1097/01.blo.0000036002.13841.32>
- SHEPHERD, D.E.T., Seedhom, B.B., 1999. Thickness of human articular cartilage in joints of the lower limb. *Ann Rheum Dis* 58, 27–34. <https://doi.org/10.1136/ard.58.1.27>
- SU, Y., Yang, P., Fu, Z., Jin, Z., Wang, C., 2011. Time-dependent elastohydrodynamic lubrication analysis of total knee replacement under walking conditions. *Comput Methods Biomech Biomed Engin* 14, 539–548. <https://doi.org/10.1080/10255842.2010.485569>
- TICHY, J., Bou-Saïd, B., 2008. The Phan-Thien and Tanner model applied to thin film spherical coordinates: applications for lubrication of hip joint replacement. *J Biomech Eng* 130, 021012. <https://doi.org/10.1115/1.2899573>
- WANG, W.-Z., Jin, Z.M., Dowson, D., Hu, Y.Z., 2008. A study of the effect of model geometry and lubricant rheology upon the elastohydrodynamic lubrication performance of metal-on-metal hip joints. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 222, 493–501. <https://doi.org/10.1243/13506501JET363>
- WANG, X., Wang, T., Jiang, F., Duan, Y., 2005. The hip stress level analysis for human routine activities. *Bio-med. Eng. Appl. Basis Commun.* 17, 153–158. <https://doi.org/10.4015/S101623720500024X>

- WEISS, B.A., Berli, M.E., Ubal, S., Paolo, J.D., 2015. Numerical Solution of a 2D Lubrication Model with Sommerfeld Boundary Conditions for Hip Prostheses, in: Braidot, A., Hadad, A. (Eds.), VI Latin American Congress on Biomedical Engineering CLAIB 2014, Paraná, Argentina 29, 30 & 31 October 2014, IFMBE Proceedings. Springer International Publishing, pp. 876–879.
- WEISS, B.A., Ubal, S. y Di Paolo, J., 2018. Lubricación por aplastamiento en articulación natural de rodilla con fluido sinovial no newtoniano. *Mecánica Computacional (ISSN 2591-3522)* Vol XXXVI, pp. 1855-1864
- WEISS, Brenda Anahí, Bou-Saïd, Benyebka, Ubal, Sebastián, Di Paolo, José, 2019. The Phan-Thien and Tanner model applied to the lubrication of knee prostheses. *Journal of Biomechanical Engineering*.
- WHITTLE, M.W., 2006. *An Introduction to Gait Analysis*, 4th Revised edition edition. ed. Butterworth-Heinemann Ltd, Edinburgh.
- YOUSFI, M., Bou-Saïd, B., Tichy, J., 2013. An analytical study of the squeezing flow of synovial fluid. *Mechanics & Industry* 14, 59–69. <https://doi.org/10.1051/meca/2012044>

**PID 6162****Denominación del Proyecto**

Investigaciones teórico-computacionales para el desarrollo de prótesis articulares de mayor duración para miembro inferior

**Director**

DI PAOLO, José

**Codirector**

BERLI, Marcelo

**Unidad de Ejecución**

Facultad de Ingeniería

**Cátedras**

Mecánica de Fluidos, Física Mecánica, Mecánica del Sólido

**Dependencia**

Universidad Nacional de Entre Ríos

**Contacto**

[jdipaolo@bioingenieria.uner.edu.ar](mailto:jdipaolo@bioingenieria.uner.edu.ar)

**Integrantes del proyecto**

Campana, Diego M.; Frías, Exequiel R.; Insfrán, Jordan F.; Ubal, Sebastián; Weiss, Brenda A.

**Becarios**

Marinelli, Franco (becario UNER); Robledo Blasco, Leandro E. (becario EVC-CIN)

**Fechas de iniciación y de finalización efectivas**

01/02/2016 y 28/02/2019

Aprobación del Informe Final por Resolución CS N° 046/19 (15/04/2019)