S19 CDyT Ciencia, Docencia y Tecnología
Suplemento CDyT
VOL. 15 | N° 19 | 2025 ISSN 2250-4559

PID 9117

Construcciones y mecanismos mentales asociados a los conceptos de función, límite y continuidad de funciones

Sergio P. Farabello; Carina A. Fusse; Yanina M. Morales, María F. Mostto; Octavio A. Raschett

Autoras/es: Facultad de Bromatología. Universidad Nacional de Entre Ríos. Perón 1154. Gualeguaychú. Entre Ríos.
Contacto: sergio.farabello@uner.edu.ar

ARK: https://id.caicyt.gov.ar/ark:/s22504559/5jjjt4zzq

RESUMEN

La planificación de una clase de Matemática implica una serie de factores que el docente tiene que tener en cuenta como, por ejemplo: el tema a enseñar, la guía de estudio, la guía de ejercitación, material audiovisual a emplear, recursos TIC a incorporar, tiempo de exposición, diseño de actividades para resolver en grupo, etc. El objetivo principal de la planificación es, aunque no se lo manifieste explícitamente, lograr que el alumno aprenda.

Como profesores de Matemática debemos preguntarnos cómo se genera el aprendizaje de un determinado tema de Matemática en nuestros estudiantes, qué procesos llevan a cabo para lograrlo, o cómo influye en ellos el entorno del aula. Y para poder comprender el aprendizaje matemático, es necesario tener en cuenta cómo se conforman los sistemas conceptuales de las personas.

Los conceptos de función, límite y continuidad de funciones constituyen el corazón del Cálculo. Por ello nos preguntamos, en el marco de la Teoría APOE: ¿cómo construyen los estudiantes los conceptos de función, límite y continuidad de funciones?, ¿cuál es la relación que existe entre las DGI y las construcciones mentales realizadas por los estudiantes al construir los conceptos de función, límite y continuidad de funciones?

Mediante la realización de esta investigación aportamos algunas respuestas a esos interrogantes brindando, además, una base para diseñar, en el marco de la teoría APOE, instrumentos para la enseñanza de los conceptos de función, límite y continuidad de funciones.

Palabras clave: función; límite; continuidad; teoría APOE; descomposición genética

INTRODUCCIÓN

A menudo, los docentes nos enfrentamos con el desafío de decidir qué actividades proponer a nuestros alumnos, situados en un espacio y tiempo determinados, para enseñar un tema específico. Resolver *"qué hacemos"* se vincula firmemente con cómo debemos emplear el tiempo destinado a la clase de modo que los alumnos participen de alguna actividad que, ante nuestra mirada, dé cuenta de un proceso que conduce a aprender aspectos del tema en cuestión.

En numerosas oportunidades, nos resulta casi imposible distinguir cuál es el desafío –con respecto al objeto matemático en cuestión– al que enfrentamos a nuestros alumnos con la propuesta de realización de una actividad determinada.

A la hora de reflexionar sobre cuáles son los conocimientos involucrados en una tarea específica, las respuestas son generalmente una amalgama de temas vinculados de alguna manera con esa tarea. Algunos materiales curriculares y también libros de texto proponen ayudas para que el docente tome decisiones acordes con su proyecto didáctico, pero es muy difícil en tanto el portador sea un material escrito, difundir las condiciones de realización y gestión de una clase (Fregona, 2013).

La planificación de una clase de Matemática implica una serie de factores que el docente tiene que tener en cuenta como, por ejemplo: el tema a enseñar, la guía de estudio, la guía de ejercitación, material audiovisual a emplear, recursos TIC a incorporar, tiempo de exposición, diseño de actividades para resolver en grupo, etc. El objetivo principal de la planificación es, aunque no se lo manifieste explícitamente, lograr que el alumno aprenda. Por ello se habla comúnmente de estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Pero son pocos los profesores que se preguntan cómo se genera el aprendizaje de un determinado tema de Matemática en sus estudiantes, qué procesos llevan a cabo para lograrlo, o cómo influye en ellos el entorno del aula (López Acosta, 2011).

La falta de aprehensión conceptual de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes se ha puesto de manifiesto porque en las prácticas docentes se favorecen aspectos relacionados con la memorización de definiciones, fórmulas y algoritmos, la automatización de procesos y la enseñanza de técnicas de resolución que, según López Acosta (2011), han favorecido que los estudiantes se limiten a imitar técnicas y procedimientos que el profesor muestra durante su clase como si se tratara de "*seguir una receta*".

Para poder comprender el aprendizaje matemático es necesario tener en cuenta cómo se conforman los sistemas conceptuales de las personas. Resulta importante —para cualquier proceso educativo que se pretenda encarar— explicar, por ejemplo, por qué los estudiantes se diferencian unos de otros en la forma en que actúan o hacen determinadas cosas. Contar con esa información implicaría estar en mejores condiciones para diseñar estrategias didácticas orientadas al aprendizaje matemático en forma orgánica, tendientes a abandonar paulatinamente las ideas simplistas que reducen la complejidad del aprendizaje a formas de "*trasmisión matemática*".

FUNDAMENTACIÓN DEL PROBLEMA

En los cursos de Matemática existe una tendencia generalizada de reducir los "aprendizajes" a la realización mecánica de procesos y algoritmos. En el aula no se suele priorizar la comprensión de los conceptos matemáticos y sus significados, generando en los estudiantes muchas concepciones inconsistentes con las aceptadas en las Matemáticas. A esto hace referencia Artigue (1995) al expresar que

> "... si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos (...) y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en el campo del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento..."

En los cursos de Cálculo se desarrollan contenidos en torno al estudio de las propiedades y características asociadas al concepto de función, tales como: tipos de funciones, dominio, rango, composición de funciones, límite y continuidad de una función, derivada de una función, entre otros.

El Cálculo reúne una gran cantidad de subtemas que están íntimamente relacionados, y el manejo pobre de algunos subconceptos impide su desarrollo profundo de los conceptos propios de él, como lo son: funciones, límite, continuidad, derivada e integral.

Uno de esos problemas es el aprendizaje del concepto de función. Como lo menciona Hitt (1998) los estudiantes generalmente se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto de función, lo que produce una limitación en su comprensión.

Generalmente, los docentes no consideran una tarea fundamental la conexión entre las diferentes representaciones de un concepto para ir en busca de la construcción del conocimiento matemático y, particularmente en el caso del concepto de función, las tareas de conversión son minimizadas por gran parte de los docentes.

La realización de tareas de conversión promovería un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización. Esto es mencionado por Artigue (1995):

> "... la enseñanza de los conceptos fundamentales del Cálculo es fuente generadora de problemas, ya que si bien los docentes ofrecen a sus estudiantes herramientas mecánicas para realizar algunos procesos como el determinar si una expresión algebraica es una función, así como hallar un límite al infinito o determinar un máximo relativo a través del proceso de derivación; pero el hecho de que el estudiante realice los procesos mecánicos de forma más o menos correcta, no implica que haya alcanzado una comprensión satisfactoria de dichos conceptos, muy seguramente debido a que la enseñanza universitaria tradicional tiende a favorecer la práctica algorítmica y algebraica del Cálculo, reduciendo los procesos evaluativos no al entendimiento y aplicación de conceptos sino a la replicación mecánica de ciertos protocolos de solución..."

Hernández-Suárez, Prada-Núñez y Ramírez-Lea (2017) investigaron los obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad que presentan los estudiantes universitarios al inicio del proceso de su formación académica en una universidad pública de Colombia. En sus conclusiones manifiestan que el tema de límite de una función es abordado por el docente casi siempre de forma algebraica, lo cual resulta válido hasta el momento en que el estudiante se tiene que enfrentar a expresiones de límites indeterminados para los cuales debe proceder a factorizar, momento en el que comienzan a surgir inconvenientes debido a la baja competencia que poseen los estudiantes en los procesos de factorización. Indican además que esta dificultad podría evitarse si al momento de explicar el tema el docente incorporara diversos registros de representación semiótica de forma que resulten complementarios unos con otros, pero que parta siempre del concepto de aproximación por los dos lados, es decir, verificar la condición de unicidad del límite.

En relación al tema de continuidad de funciones evidenciaron desconocimiento en los estudiantes en el proceso a seguir en el momento de la evaluación. Reportan dificultades para determinar el tipo de discontinuidad que presenta una función, que sumado al desconocimiento de las funciones definidas por partes resulta inoperable la determinación de una adecuada solución cuando la discontinuidad es evitable.

Además, concluyen que los estudiantes confunden los conceptos de límite y continuidad asumiendo que ambos representan la misma idea, lo que se convierte en un obstáculo conceptual. En sus procesos argumentativos presentan dificultad para evaluar la existencia del límite en un punto, lo que les impide asimismo determinar el tipo de discontinuidad que se pueda presentar.

Finalmente sugieren que los docentes tienen que implementar secuencias didácticas que vayan aumentando gradualmente la complejidad de las situaciones, al tiempo que utilicen diversos registros de representación.

En este trabajo se pretende dar respuesta a qué concepción tienen los estudiantes sobre los conceptos de función, límite y continuidad de funciones en el marco de la Teoría APOE.

OBJETIVOS

Objetivo general

Estudiar el desarrollo del esquema de los conceptos de función, límite y continuidad de funciones.

Objetivos específicos

- Identificar y analizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al construir los conceptos de función, límite y continuidad de funciones.
- Identificar las relaciones entre las descomposiciones genéticas iniciales (DGI) y las construcciones mentales realizadas por los estudiantes al construir los conceptos de función, límite y continuidad de funciones.
- Describir el tipo de relaciones que establecen los alumnos en los distintos niveles de desarrollo del esquema de los conceptos de función, límite y continuidad de funciones.

PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

- ¿Cómo construyen los estudiantes los conceptos de función, límite y continuidad de funciones?
- ¿Cuál es la relación que existe entre las DGI y las construcciones mentales realizadas por los estudiantes al construir los conceptos de función, límite y continuidad de funciones?

- ¿Qué relaciones se manifiestan en los distintos niveles de desarrollo del esquema de los conceptos de función, límite y continuidad de funciones?

MARCO TEÓRICO

Se adopta como marco teórico la *Teoría APOE* (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) desarrollada por Dubinsky y un grupo de colaboradores del *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC).

Dubinsky y Lewin (1986) proponen la *"abstracción reflexiva"* de Piaget como base teórica para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos y, plantea que el origen de la teoría APOE se encuentra en la reformulación de la teoría Piagetiana de la Abstracción Reflexiva para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

En la teoría APOE se define un ciclo de investigación que consta de tres componentes: 1) análisis teórico; 2) diseño e implementación de la enseñanza, y 3) observación, análisis y verificación de datos (Figura 1).

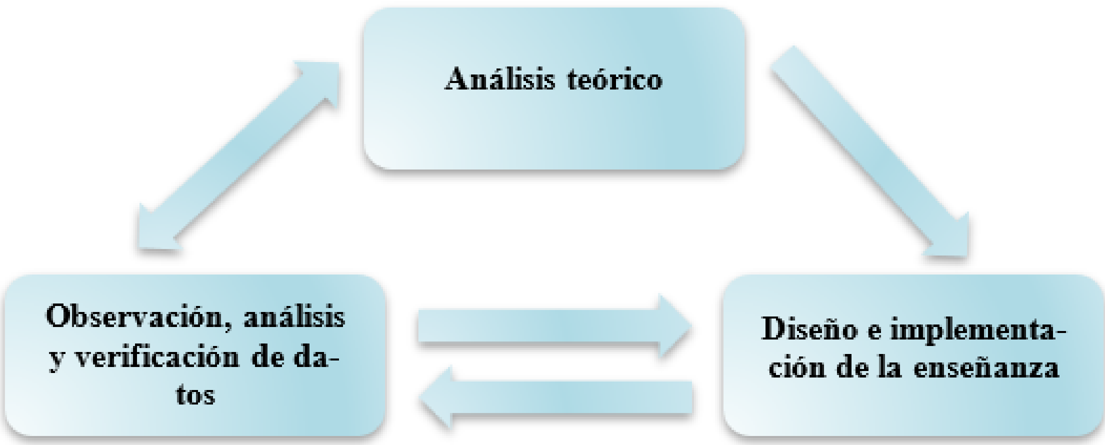


Figura 1. Ciclo de investigación de la Teoría APOE
Nota. Adaptado de Arnon et al. (2014)

Análisis teórico

El análisis teórico tiene como finalidad proponer un modelo que pueda describir las construcciones mentales específicas del alumno, al momento de desarrollar la comprensión del concepto que está estudiando. El resultado de este análisis es lo que se denomina *descomposición genética* (DG) del concepto. La DG consiste en una descripción detallada de las construcciones mentales que el individuo debería realizar para poder enfrentarse satisfactoriamente a un concepto matemático en particular.

La Teoría APOE reconoce que la DG de un concepto no es única, ya que distintos estudiantes pueden seguir caminos diferentes de los descriptos en una DG particular. Por lo tanto, el valor de una DG reside en su uso como un modelo general que describe aquellas construcciones que se encuentran necesarias para que la mayoría de los estudiantes puedan aprender un concepto. Como con cualquier modelo teórico general y descriptivo, varias DG pueden ser diseñadas por diferentes investigadores o incluso por un mismo grupo de investigadores para describir el aprendizaje de un concepto particular. Si esas descomposiciones genéticas están respaldadas por estudios empíricos de las construcciones de los estudiantes, podrían considerarse descripciones razonables de las construcciones de los estudiantes.

La *descomposición genética inicial* (DGI) es el análisis teórico realizado a priori por el investigador y constituye la base a partir de la cual se llevará a cabo el diseño e implementación de la instrucción, así como el análisis de resultados.

La DGI irá evolucionando con cada iteración del ciclo definido en la Figura 1, proceso que se conoce como refinamiento de la DG. Este refinamiento permitirá comprender cada vez más cómo los alumnos construyen el concepto matemático que se está analizando y conformará una nueva base para la propia investigación o para investigaciones futuras.

Para construir un concepto matemático, el individuo comienza ejerciendo *Acciones* sobre objetos previamente construidos. Las Acciones responden a estímulos externos y son realizadas paso a paso por el individuo –mirar o recordar una fórmula o tabla; utilizar un algoritmo determinado–.

Cuando el estudiante repite una Acción y reflexiona sobre ella, aunque sin la necesidad de ejecutarla explícitamente, puede interiorizarla en un *Proceso* (Figura 2). Este se caracteriza porque el estudiante no requiere de estímulos externos para realizar la operación e incluso puede saltar pasos o anticipar el resultado de su aplicación (Dubinsky, 1996, Arnon et al. 2014).

La Teoría APOE define otros dos mecanismos por medio de los cuales se puede generar un Proceso: la *coordinación* y la *reversión o inversión*. El mecanismo de coordinación tiene lugar cuando un Proceso construido se relaciona con otro Proceso para determinar un nuevo Proceso. El mecanismo de reversión permite a un individuo revertir un Proceso existente dando origen a un nuevo Proceso.

Cuando un individuo logra reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un Proceso en particular, toma consciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él —ya sean Acciones o Procesos— y puede construir esas transformaciones, entonces el proceso ha sido *encapsulado* por el individuo en un *Objeto*.

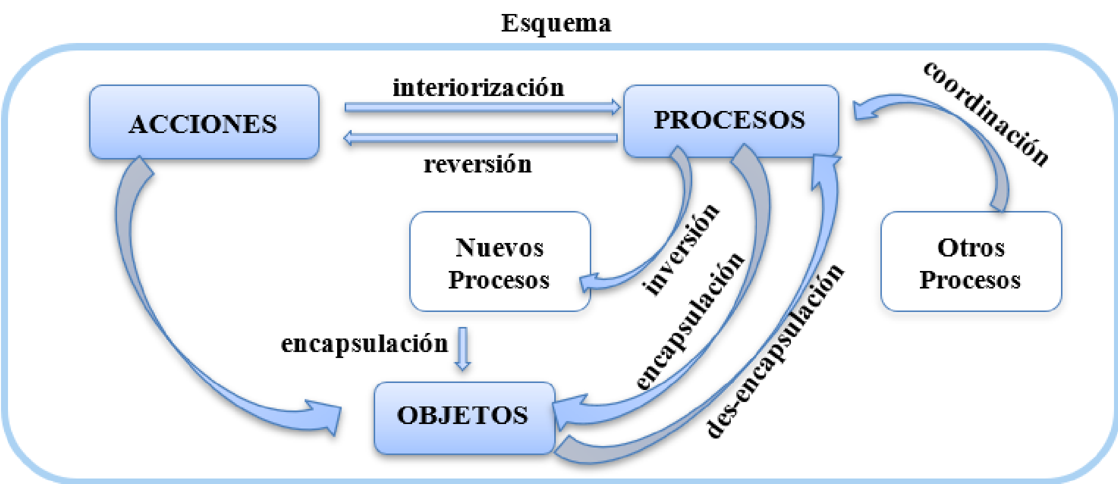


Figura 2. Estructura y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático

Una vez que un individuo ha logrado construir un Objeto, puede ser capaz de regresar sobre los Procesos que lo generaron a través del mecanismo de *desencapsulación*. De esta manera, podrá ir y venir entre el Objeto y el Proceso cada vez que sea necesario.

Los *Esquemas* se definen como una colección coherente de Acciones, Procesos y Objetos —a la que pueden sumarse también otros Esquemas y las relaciones existentes entre ellos— asociados a un concepto particular (Asiala et al., 1997). Los Esquemas que forman la estructura matemática de un individuo no están acabados, son estructuras dinámicas que evolucionan constantemente cada vez que nuevas relaciones se construyen entre sus componentes. Un Esquema puede ser *tematizado* en un nuevo Objeto sobre el cual pueden hacerse nuevas Acciones.

En los estudios llevados a cabo con la teoría APOE se caracteriza el nivel de conocimiento que demuestran los estudiantes en términos de concepciones, no para clasificarlos, sino para determinar aquellas construcciones que son necesarias para apoyar su desarrollo del conocimiento. Cuando un estudiante responde a distintas situaciones problemáticas utilizando mayoritariamente Acciones da evidencia de haber construido una concepción o nivel Acción. Asimismo, las concepciones Proceso u Objeto se caracterizan por el hecho de que el estudiante muestre mayoritariamente la construcción de dichas estructuras en sus respuestas a diversos problemas relacionados con el concepto en cuestión.

Diseño e implementación de la enseñanza

La Teoría APOE establece como modelo didáctico el ciclo de enseñanza ACE, estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) *actividades*; (C) *discusión en el aula*; y (E) *ejercicios* (Figura 3).

En la primera parte del ciclo, las *Actividades*, los estudiantes trabajan de manera colaborativa en grupos resolviendo tareas diseñadas con el fin de reflexionar sobre sus construcciones previas y promover las construcciones mentales sugeridas en la DG.

En la *Discusión en clase* los estudiantes desarrollan las tareas propuestas, reflexionan sobre su trabajo y el profesor subraya las ideas importantes o introduce preguntas para promover el surgimiento de ideas que aún no aparecieron.

En la última etapa del ciclo, los *Ejercicios de tarea*, los estudiantes se enfrentan a situaciones problemáticas diseñadas con el fin de reforzar la reflexión realizada en las dos etapas previas.

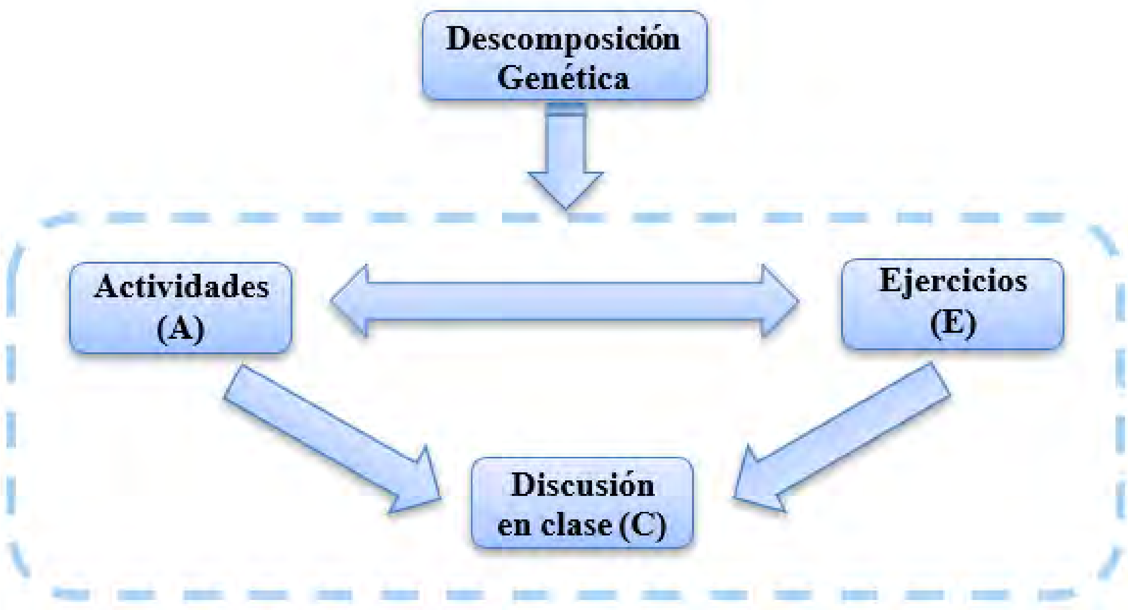


Figura 3. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la DG

En la Figura 3 también se puede apreciar la relación existente entre la DG y el ciclo de enseñanza ACE. Se puede observar que la DG afecta a todos y cada uno de los componentes del ciclo ACE.

Observación, análisis y verificación de datos

Para recolectar los datos se pueden utilizar los siguientes instrumentos:

- Preguntas y respuestas escritas, en forma de cuestionarios, con preguntas cerradas o abiertas.
- Entrevistas semiestructuradas realizadas a los estudiantes posteriormente a la finalización del ciclo ACE, con la intención de profundizar lo más posible la búsqueda de las construcciones mentales.
- Una combinación de instrumentos escritos y entrevistas.

Una vez finalizado el análisis de los instrumentos y la transcripción y análisis de las entrevistas, el investigador procede a contabilizar y clasificar las construcciones mentales del concepto matemático estudiado, tomando como base el análisis teórico plasmado en la DG. Esto permite analizar críticamente la DGI y plantear una nueva etapa de investigación, comenzando por el refinamiento de la DG y desarrollando un nuevo ciclo de enseñanza ACE, tras el cual se volverán a recolectar, analizar y verificar los datos con el objetivo de acercarnos cada vez más a poder describir la forma en que un estudiante comprende el concepto matemático.

El ciclo puede repetirse tantas veces como el investigador lo considere necesario e, incluso, los resultados obtenidos pueden ser tomados por otros investigadores en pos de continuar el proceso de investigación.

Descomposición Genética Inicial (DGI)

Las construcciones que se describen en la descomposición genética (DG) no siguen necesariamente un orden progresivo o lineal, porque el estudiante puede regresar del Proceso a la Acción o realizar las Acciones en un orden distinto al que se elige para escribir la DG. Sólo para facilitar el análisis de los resultados se realizó una lista de las construcciones descritas en la DG y se las numeró en forma correlativa (Tablas 1 y 2), pero debe tenerse en cuenta que ese número asignado no tiene necesariamente ninguna relación con un orden de aparición de esas construcciones en los estudiantes.

Primera DGI: Funcione

Tabla 1. Descomposición Genética Inicial del concepto Función

ACCIONES	
A1	Reconocer la pertenencia de determinados elementos en cada uno de los conjuntos
A2	Establecer relaciones entre ambos conjuntos, construir un diagrama de Venn, una gráfica en un plano cartesiano, o una tabla con la intención de representarlos
A3	Tomar un elemento de un conjunto aplicando estrictamente la regla definida por la relación entre los dos conjuntos, para asignarle un elemento del segundo conjunto
A4	Conociendo una expresión algebraica que defina la relación entre ellos, sustituir la variable en la expresión y realizar algún tipo de manipulación
A5	Evaluar numéricamente la expresión de la relación dada
A6	Reconocer las variables que intervienen, sin identificar cuál es la independiente y cuál la dependiente
PROCESOS	
P1	Identificar todos los elementos que en general pertenecen a cada conjunto, mediante alguna característica que tengan en común dentro del conjunto
P2	Reconocer la relación entre dos conjuntos, expresando esa relación a través de una representación de cualquier tipo que indique una correspondencia entre ellos
P3	Evaluar en una variable general la expresión de la relación dada, sin realizarlo en números específicos
P4	Explicar el comportamiento de una variable en función de la otra, aún sin darle valores específicos a la segunda
P5	Ubicar en el plano cartesiano diferentes puntos correspondientes a la gráfica de una función sin tener que realizar las Acciones de reemplazar en la expresión algebraica los valores de la variable de entrada
P6	Establecer la relación entre dos conjuntos identificando las variables independientes y dependientes sin recurrir a Acciones específicas
P7	Obtener los valores de entrada a partir de la aplicación, a los valores de salida, de una relación invertida definida entre dos conjuntos
P8	Modificar la expresión —analítica o gráfica— de una relación para transformarla en una función
OBJETOS	
O1	Reconocer funciones inyectivas, biyectivas y sobreyectivas
O2	Aplicar operaciones algebraicas a las funciones (suma, resta, producto y cociente)
O3	Determinar la continuidad y discontinuidad de una función
O4	Analizar la derivabilidad de una función

Segunda DGI: Límite y continuidad de funciones

La DGI del concepto de límite se basó en el análisis comparativo realizado por Cottril *et al*. Publicado por Guachimin Quingaluisa (2020).

Tabla 2. Descomposición Genética Inicial del concepto Límite y Continuidad de Funciones

ACCIONES	
A1	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(\mathcal{X})$ en un solo valor de que es considerado cercano, o a veces igual a $\mathcal{X}_0$
A2	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(\mathcal{X})$ en algunos valores de , siendo ellos cada vez más cercanos a $\mathcal{X}_0$
A3	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(\mathcal{X})$ en algunos valores de , siendo ellos cada vez más cercanos por derecha o por izquierda a $\mathcal{X}_0$
A4	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(\mathcal{X})$ en algunos valores de $\mathcal{X}$, siendo ellos cada vez más pequeños ("hacia menos infinito") o más grandes ("hacia más infinito")
A5	Calcular analítica o gráficamente el límite de la función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a $\mathcal{X}_0$
A6	Calcular analítica o gráficamente el límite de la función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a infinito
A7	Identificar gráficamente la discontinuidad de una función $f(\mathcal{X})$ en un valor $\mathcal{X}$ de al encontrar un punto vacío o ausente, un salto finito o una asíntota vertical
A8	Comprobar gráficamente la continuidad de una función $f(\mathcal{X})$ en un valor $\mathcal{X}$ de verificando el cumplimiento de las condiciones que tienen que cumplirse para que una función sea continua en un punto
A9	Comprobar analíticamente la continuidad de una función $f(\mathcal{X})$ en un valor $\mathcal{X}$ de verificando el cumplimiento de las condiciones que tienen que cumplirse para que una función sea continua en un punto
PROCESOS	
P1	Cuando $\mathcal{X}$ se aproxima a $\mathcal{X}_0$ por derecha y por izquierda, las imágenes de $f(\mathcal{X})$ se aproximan a un mismo valor L
P2	Cuando $\mathcal{X}$ se aproxima a $\mathcal{X}_0$ por derecha o por izquierda, las imágenes de $f(\mathcal{X})$ se alejan hacia más o menos infinito
P3	Cuando $\mathcal{X}$ se aleja indefinidamente hacia la izquierda o hacia la derecha, las imágenes de $f(\mathcal{X})$ se aproximan a un valor L
P4	Reflexionar sobre las condiciones que tiene que cumplir una función $f(\mathcal{X})$ para que sea continua en un valor de $\mathcal{X}$
P5	Interpretar el significado del valor del límite de una función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a $\mathcal{X}_0$
P6	Interpretar el significado del valor del límite de una función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a infinito
OBJETOS	
O1	Manifestación consciente de la existencia o no del límite de la función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a $\mathcal{X}_0$ escribiendo además la expresión algebraica correspondiente
O2	Manifestación consciente de la existencia o no del límite de la función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a infinito, escribiendo además la expresión algebraica correspondiente
O3	Comprender la relación entre la existencia o no del límite de una función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a $\mathcal{X}_0$ y la existencia o no de la imagen de la función $f(\mathcal{X})$ en el valor $\mathcal{X}_0$
O4	Manifestar la relación entre la existencia de una asíntota vertical u horizontal de una función $f(\mathcal{X})$ con el límite de la función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a un valor finito o infinito, respectivamente
O5	Interpretar que si una función $f(\mathcal{X})$ es continua en un valor $\mathcal{X}_0$, el límite de la función se puede calcular a través de la imagen de la función en $\mathcal{X}_0$
O6	Comprender que la existencia de un punto vacío en la representación gráfica de la función implica la existencia del límite de una función $f(\mathcal{X})$ cuando $\mathcal{X}$ tiende a $\mathcal{X}_0$ (por izquierda, por derecha o por ambos lados), pero no de la imagen de esa función en el punto $\mathcal{X}_0$

METOLOGÍA

La implementación de esta investigación se llevó a cabo con los alumnos que cursaron Matemática II en los años 2021 y 2022, asignatura correspondiente al segundo semestre del primer año del Ciclo de Cursado Común de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina, con los estudiantes que habían terminado exitosamente el curso de Cálculo Diferencial en el semestre anterior, cuyo contenido incluyó los temas de funciones, límite y continuidad de funciones.

Los estudiantes fueron invitados a participar en forma voluntaria e informados acerca del alcance de las actividades que se les propuso realizar, indicándoles que las mismas no tendrán carácter evaluativo, sino que formarían parte de una investigación en Enseñanza de la Matemática.

Inicialmente, se trabajó en el diseño de las *descomposiciones genéticas iniciales* (DGI) para los conceptos de función, límite y continuidad de funciones, las que funcionarían como hipótesis *a priori* y, a menos que sean probadas experimentalmente, mantendrían su carácter de preliminar respecto de la viabilidad de las construcciones y mecanismos mentales que se han dispuesto en ella (Arnon et al., 2014).

Luego, se realizaron dos talleres —Taller 1 y Taller 2— que tuvieron como objetivo lograr que los participantes modelen cognitivamente la construcción de los conceptos matemáticos función, límite y continuidad de funciones con sustento en la Teoría APOE, para lo cual pusieron de manifiesto sus propias concepciones, cotejándolas con los mecanismos mentales dispuestos en las DGI diseñadas. En los talleres se incorporó el uso del Software GeoGebra como herramienta dinámica para el estudio de los temas que forman parte de esta investigación.

Los talleres se estructuraron de acuerdo al método de diseño de la enseñanza que nos sugiere la Teoría APOE, a través del *Ciclo de Enseñanza ACE*, compuesto de las etapas de actividades (A), discusión de clase (C) y ejercicios (E) (Arnon et al., 2014).

En la etapa A, los participantes resolvieron un cuestionario en forma grupal para así activar las construcciones mentales que sugieren nuestras DGI; luego se desarrolló la etapa C, que –en forma plenaria– permitió reflexionar y discutir con los participantes respecto de la pertinencia de las actividades planteadas para validar la DG; y finalmente, en la etapa E, los participantes resolvieron problemas no rutinarios, los que dan soporte a las construcciones mentales de la etapa A, y que permiten aplicar lo que han aprendido durante las fases anteriores.

<u>Taller 1: Funciones</u>

Se diseñó una actividad del tipo Taller consistente en 10 encuentros en los que se trataron los siguientes temas:

- Tema 1: GeoGebra. Gráfica y análisis de funciones
- Tema 2: Relaciones y funciones

En cada uno de los encuentros del taller se propusieron actividades que los estudiantes tenían que realizar y discutir en grupo, cerrando cada encuentro con una breve puesta en común.

Al finalizar el Tema 2 se propusieron actividades del mismo tipo a las desarrolladas en cada encuentro, para lo cual se diseñaron instrumentos específicos en base a lo observado en las clases y a la Descomposición Genética Inicial. Estas actividades fueron realizadas y presentadas de manera individual por los estudiantes, y en base a esas producciones se analizó la comprensión del concepto de función.

Al taller lo iniciaron 25 estudiantes, pero el número fue mermando a lo largo de los encuentros. Las actividades realizadas al finalizar el Tema 2 fueron completadas por 17 estudiantes, mientras que las correspondientes al Tema 3, fueron completadas por 11 estudiantes. En ambos casos contaron con un tiempo de 15 días para realizarlas.

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas en base a los criterios definidos en este trabajo, con el fin de caracterizarlos según hubiesen evidenciado la construcción de un nivel de Acción, Proceso u Objeto, conforme al marco teórico adoptado.

A continuación, se enumeran algunas de las actividades realizadas en los encuentros por los estudiantes y debatidas en grupo.

- Graficar con GeoGebra la recta que pasa por los puntos $P(-3;-2)$ y $Q(2;4)$

  Obtener gráficamente el ángulo de inclinación. Observar y discutir qué ocurre si se modifica la posición de uno de los dos puntos dados.

- Graficar con GeoGebra la función irracional $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{1-x}}$

  Hallar gráficamente los cortes con los ejes cartesianos. Hallar las asíntotas.

- Graficar con GeoGebra la función definida por partes $f(x)=\begin{cases} 1-x & si \quad x<1 \\ 2-(x-1)^2 & si \quad 1\leq x\leq 3 \\ -2 & si \quad x>3 \end{cases}$

  Graficar con GeoGebra la suma, la resta, el producto y el cociente de las funciones $f(x)=2-x^2$ y $g(x)=x-1$

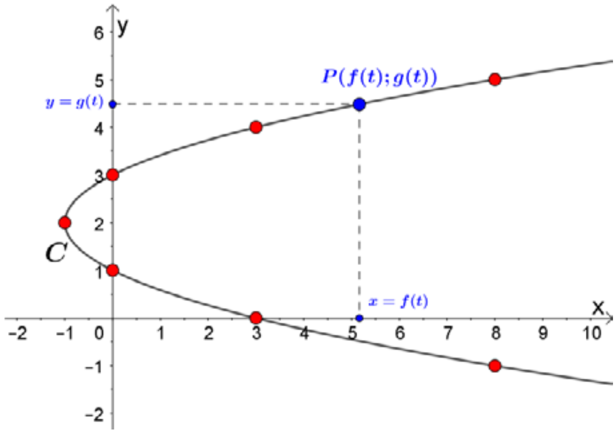
  Analizar las características de las funciones obtenidas en cada caso.

  Graficar con GeoGebra las composiciones $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ y $g\circ g$ de las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x+1$

  Analizar las características de las funciones obtenidas en cada caso.

- La curva definida por la ecuación paramétrica $\begin{cases} x=t^2-2t \\ y=t+1 \end{cases}$ representa la trayectoria en el plano de una partícula a lo largo del tiempo.

Debatir por qué los puntos marcados en color rojo aparecen con ***diferente separación*** siendo que entre un punto y otro ha transcurrido el ***mismo intervalo de tiempo***.



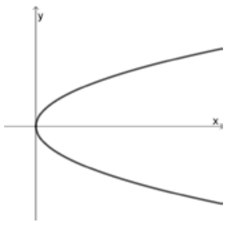
¿Qué restricción debería imponerse al parámetro para que el movimiento representado corresponda a un problema real?

- Analizar y discutir si se puede establecer alguna relación en las siguientes situaciones:
  - La edad de una determinada persona relacionada con su peso a lo largo de su vida.
  - Un número y su mitad.
  - Un número y su cuadrado.
  - El precio de la *Nafta Premium* y los días del año.
  - La fecha de nacimiento de una persona y su número de CUIL.
  - Un animal y la forma en que puede desplazarse.
  - El aeropuerto de salida y el de llegada de un avión de pasajeros.
- Siendo $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$; $B = \{1,\ 4,\ 7,\ 23\}$ analizar y discutir si las relaciones $\mathcal{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$ definidas a continuación son o no una función $f: A \to B$.
- El volumen de una esfera es proporcional a su radio. ¿Es o no una función? Justificar.

Como cierre del Tema 2 se aplicó un instrumento diseñado en base a las actividades desarrolladas en clase y a la Descomposición Genética Inicial, tomándose como base la tesis de Quintanilla Cóndor (2009), adaptándolo en función de los objetivos de la investigación.

Consta de 22 situaciones, numeradas desde S01 hasta S22, y clasificadas en 7 categorías: expresiones algebraicas, gráficas, tablas, proposiciones, ecuaciones, pares ordenados y sucesiones. Algunas de esas situaciones se muestran a continuación.

Situación 2



Situación 3

En la Tabla se indican las notas obtenidas por los estudiantes de Matemática I en un examen parcial (escala de 1 a 10).

Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6	Alumno 7	Alumno 8
7	5	2	7	8	10	8	7

Situación 4

Sea:

b) a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / y^2 = x^2\}$, definido $\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ en

a) b) $D = \left\{(x, y) \in \frac{\mathbb{Z}^2}{y^2} = x^2\right\}$, definido $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ en

Situación 8

La relación existente entre el área del círculo y su radio.

Situación 9

$$y = \begin{cases} x & si \quad x \leq -1 \\ 1 - x^2 & si \quad -1 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Situación 12

$\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$ siendo $\boldsymbol{t}$ un número real

Situación 14

Un nadador sale desde una orilla y cruza al otro lado del río.

Situación 15

$$sen\, x + cos\, x = 0$$

Taller 2: Límite y continuidad de funciones

Se diseñó una actividad del tipo Taller consistente en 6 encuentros en los que se trataron los temas de límite y continuidad de funciones.

En cada uno de los encuentros del taller se propusieron actividades que los estudiantes tenían que realizar y discutir en grupo, cerrando cada encuentro con una breve puesta en común.

Para cada uno de los encuentros se diseñaron actividades en función de la DGI definida para la comprensión del concepto de límite y continuidad de funciones. Estas actividades fueron realizadas y presentadas de manera individual por los estudiantes, y en base a esas producciones se analizó la comprensión del concepto de función.

El taller comenzó con 60 estudiantes, número que fue variando en el transcurso de las clases, siendo 57 los estudiantes que completaron la actividad 2 correspondiente al cuarto encuentro y 28 completaron la actividad final del taller.

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas en base a los criterios definidos en este trabajo, con el fin de caracterizarlos según hubiesen evidenciado la construcción de un nivel de Acción, Proceso u Objeto, conforme al marco teórico adoptado.

A continuación, se enuncian algunas de las actividades realizadas en los encuentros por los estudiantes y debatidas en grupo.

- Distribuidos en grupos, resolver las actividades planteadas y escribir las conclusiones a las que cada grupo arribe. Una vez finalizada la actividad, realizaremos una puesta en común del trabajo realizado.

1. ¿Cuándo existe el límite de una función para "x" tendiendo a "x_0"?
2. ¿Qué significa que **no existe** el límite de una función $f(x)$ para "x" tendiendo a "x_0"?

   ¿Qué ocurre con los valores que toma la función $f(x)= x-2$ cuando "*x se aproxima lo suficientemente a 3*"? Completar la tabla e interpretar los resultados obtenidos.

   3.1. ¿Qué ocurre con la imagen de la función cuando *"x toma valores menores que 3 pero muy próximos a 3"*?
   3.2. ¿Qué ocurre con la imagen de la función cuando *"x toma valores mayores que 3 pero muy próximos a 3"*?
   3.3. ¿Qué ocurre con la imagen de la función cuando $x \to 2$
   3.4. Determinar si existe el $\lim_{x \to 3} x - 2$. En caso de que el límite exista, explicar por qué.
   3.5. Explicar qué se entiende por valores *"muy próximos a…"*

- En forma individual, y sin consultar con ningún compañero, responder las consignas planteadas a continuación.

  Es **necesario** que escribas las respuestas **acompañadas de una justificación**, que nos permita comprender el "por qué" de tu respuesta.

  La justificación tiene que ser **un texto** acompañado de **un ejemplo o un gráfico** (pueden ir ambos) dependiendo de la situación que estés respondiendo.

1. Dada $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ¿Qué obtienes como resultado al calcular el límite cuando x *tiende a* 1? ¿Qué representa gráficamente?
2. ¿Qué significa que el límite de $g(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ cuando $x \to 2$ sea igual a $\frac{5}{3}$?
3. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

Si la imagen de $h(x)$ para $x = 2$ vale 5, entonces podemos asegurar que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$

- En forma individual, resolver la siguiente actividad:

1. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x$$

   1.1. Crear una función $h(x)$ definida en dos o más partes, cuyas partes sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$
   1.2. Analizar el dominio de la función $h(x)$
   1.3. Analizar la continuidad de la función $h(x)$

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para validar la DGI propuesta, se procedió a realizar el análisis de los datos empíricos y compararlos con el marco teórico, con el objeto de realizar un análisis fino y veraz sobre la manera como los estudiantes pueden construir el concepto de función.

En ambos talleres, todas las Acciones, Procesos y Objetos definidos en la DGI aparecieron, en mayor o menor medida en las producciones de los estudiantes.

Las entrevistas sirvieron para confirmar la manifestación de una CM determinada en los estudiantes, o para definir cuál era la CM que el estudiante evidenciaba en una determinada actividad.

Taller 1: Funciones

En la Tabla 3 se muestra la cantidad de construcciones mentales (Acción, Proceso y Objeto) que aparecieron en cada uno de los 17 estudiantes que finalizaron en forma completa el Tema 2 del Taller.

Tabla 3. Construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes

Est.	Acción	Proceso	Objeto	Caracterización
E01	5	21	3	Proceso
E02	4	34	1	Proceso
E03	4	19	2	Proceso
E04	2	14	0	Proceso
E05	5	28	4	Proceso
E06	6	25	1	Proceso
E07	9	20	0	Proceso
E08	8	34	7	Proceso
E09	7	28	0	Proceso
E10	3	26	4	Proceso
E11	0	23	4	Proceso
E12	12	33	2	Proceso
E13	4	26	9	Proceso
E14	2	18	6	Proceso
E15	9	25	0	Proceso
E16	6	16	1	Proceso
E17	5	20	2	Proceso

En el análisis conjunto de todas las actividades, los estudiantes evidenciaron una mayor presencia de construcciones mentales Proceso, razón por la cual todos fueron caracterizados en un nivel de comprensión Proceso.

Esto no quiere decir que en cada una de las situaciones planteadas todos los estudiantes hayan mostrado una mayor cantidad de construcciones mentales Procesos.

Si analizamos cada una de las situaciones en particular podemos caracterizar a los estudiantes en otro nivel de comprensión.

- En la situación S01, el estudiante E16 mostró un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S02, los estudiantes E05, E06, E07 y E09 mostraron un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S03, el estudiante E01 mostró un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S04, los estudiantes E01, E03, E15 y E16 mostraron un nivel de comprensión Acción; mientras que el estudiante E11 mostró un nivel de comprensión Objeto.

- En la situación S05, los estudiantes E03, E06, E08, E09, E12, E15 y E17 mostraron un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S06, el estudiante E08 mostró un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S07, los estudiantes E13 y E14 mostraron un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S08, el estudiante E03 mostró un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S09, el estudiante E01 evidenció un nivel de comprensión Acción; mientras que los estudiantes E13 y E17 mostraron un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S10, los estudiantes E01, E04, E08, E12, E15 y E17 mostraron un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S11, los estudiantes E07 y E14 mostraron un nivel de comprensión Acción; mientras que el estudiante E17 mostró un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S12, el estudiante E13 mostró un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S13, los estudiantes E03, E04, E07, E08, E09, E10, E16 y E17 mostraron un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S14, los estudiantes E02, E05, E06, E10, E16 y E17 mostraron un nivel de comprensión Acción; mientras que el estudiante E03 mostró un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S18, los estudiantes E08, E12, E13 y E15 mostraron un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S19, el estudiante E14 mostró un nivel de comprensión Objeto.
- En la situación S20, los estudiantes E05, E10, E12 y E17 mostraron un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S21, el estudiante E07 mostró un nivel de comprensión Acción.
- En la situación S22, los estudiantes E02, E03 y E15 mostraron un nivel de comprensión Acción; mientras que el estudiante E17 mostró un nivel de comprensión Objeto.

Las estructuras mentales Acción que aparecieron con mayor frecuencia fueron:

- Establecer relaciones entre ambos conjuntos, construir un diagrama de Venn, una gráfica en un plano cartesiano, o una tabla con la intención de representarlos —ecuaciones—.
- Tomar un elemento de un conjunto aplicando estrictamente la regla definida por la relación entre los dos conjuntos, para asignarle un elemento del segundo conjunto—pares ordenados—.

Las estructuras mentales Proceso que aparecieron con mayor frecuencia fueron:

- Modificar la expresión —analítica o gráfica— de una relación para transformarla en una función —expresiones algebraicas definidas en forma explícita—.
- Ubicar en el plano cartesiano diferentes puntos correspondientes a la gráfica de una función sin tener que realizar las Acciones de reemplazar en la expresión algebraica los valores de la variable de entrada —expresiones algebraicas definidas en forma implícita—.

Las estructuras mentales Objeto que aparecieron con mayor frecuencia fueron:

- Aplicar operaciones algebraicas a las funciones (suma, resta, producto y cociente) —expresiones algebraicas definidas en forma explícita—.
- Determinar la continuidad y discontinuidad de una función —expresiones algebraicas definidas en forma explícita—.

Taller 2: Límite y continuidad de funciones

En la Tabla 5 se muestran las construcciones mentales previstas (CMP) de la DGI que podían aparecer en los estudiantes al realizar la Actividad 1 (CMP), como así también la cantidad de grupos que evidenció esas CMP. La Actividad 1 fue realizada por 60 estudiantes distribuidos en 11 grupos.

En la columna "Cantidad de CM halladas", el primer número que aparece entre paréntesis corresponde a la CMP; mientras que el segundo número indica que la CMP no se evidencia con claridad. Por ejemplo, en el ejercicio 1, hubo 8 estudiantes que evidenciaron una CM Proceso y uno que evidenció una CM entre Acción y Proceso.

Cuando no figuran números entre paréntesis, debe interpretarse que la cantidad de estudiantes indicada evidenció la CMP.

Las consideraciones de los dos últimos párrafos aplican también en las Tablas 5 y 6.

Tabla 4. Construcciones mentales previstas en la DGI para la Actividad 1 y construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes al realizar la actividad en forma grupal.

Ejercicio	**Construcción Mental Prevista (CMP)**	**Identificación de la CMP**	**Cantidad de CM halladas**
Ejercicio 1	Proceso	P1	9 (8+1)
Ejercicio 2	Acción	A4	2
Ejercicios 3.1, 3.2 y 3.3	Proceso	P1	7 (5+2)
Ejercicios 3.1 y 3.2	Acción	A2	5 (4+1)
Ejercicios 3.1 y 3.2	Acción	A3	5 (4+1)
Ejercicio 3.3	Acción	A1	9 (5+4)
Ejercicio 3.4	Objeto	O1	6 (2+4)
Ejercicio 4	Acción	A2	8 (3+5)
Ejercicio 4	Acción	A3	8 (3+5)
Ejercicio 4.1	Proceso	P1	8 (5+3)
Ejercicio 4.3	Proceso	P1	9 (5+4)
Ejercicio 4.5	Proceso	P1	7 (5+2)
Ejercicio 4.2	Acción	A1	9 (4+5)
Ejercicio 4.4	Acción	A1	7 (4+3)
Ejercicio 4.6	Acción	A1	7 (4+3)
Ejercicio 4.7	Objeto	O1	6 (2+4)

En la Tabla 5 se muestran las construcciones mentales previstas (CMP) de la DGI que podían aparecer en los estudiantes al realizar la Actividad 2 (CMP), como así también la cantidad de estudiantes que evidenció esas CMP. La Actividad 2 fue realizada en forma individual por 57 estudiantes. En cada grupo hubo entre 8 y 10 estudiantes.En la Tabla 6 se muestran las construcciones mentales previstas (CMP) de la DGI que podían aparecer en los estudiantes al realizar la Actividad 4 (CMP), como así también la cantidad de estudiantes que evidenció esas CMP. La Actividad 4 fue realizada en forma individual por 28 estudiantes.

Tabla 6. Construcciones mentales previstas en la DGI para la Actividad 4 y construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes al realizar la actividad

Ejercicio	Construcción Mental Prevista (CMP)	Identificación de la CMP	Cantidad de CM halladas
Ejercicio 1 – Puntos 3 y 4	Proceso	P6	20 (15+5)
Ejercicio 1 Puntos 5 a 12	Proceso	P5	20 (13+7)
Ejercicio 2.3	Acción	A9	11 (7+4)
Ejercicio 2.3	Acción	A8	8 (3+5)
Ejercicio 2.3	Proceso	P4	14 (6+8)
Ejercicio 3	Acción	A7	6 (4+2)
Ejercicio 3	Proceso	P4	16 (5+11)
Ejercicio 4	Proceso	P4	17 (10+7)
Ejercicio 4	Objeto	O5	14 (7+7)

Las estructuras mentales Acción que aparecieron con mayor frecuencia en las actividades del Taller 2 fueron:

- Calcular analítica o gráficamente el límite de la función cuando tiende a
- Evaluar gráfica o analíticamente la función en un solo valor de que es considerado cercano, o a veces igual a
- Comprobar analíticamente la continuidad de una función en un valor de verificando el cumplimiento de las condiciones que tienen que cumplirse para que una función sea continua en un punto

Las estructuras mentales Proceso que aparecieron con mayor frecuencia en las actividades del Taller 2 fueron:

- Cuando se aproxima a por derecha y por izquierda, las imágenes de se aproximan a un mismo valor L
- Interpretar el significado del valor del límite de una función cuando tiende a
- Reflexionar sobre las condiciones que tiene que cumplir una función para que sea continua en un valor de
- Interpretar el significado del valor del límite de una función cuando tiende a infinito

Las estructuras mentales Objeto que aparecieron con mayor frecuencia en las actividades del Taller 2 fueron:

- Manifestación consciente de la existencia o no del límite de la función cuando tiende a escribiendo además la expresión algebraica correspondiente
- Comprender la relación entre la existencia o no del límite de una función cuando tiende a y la existencia o no de la imagen de la función en el valor
- Interpretar que si una función es continua en un valor , el límite de la función se puede calcular a través de la imagen de la función en
- Comprender que la existencia de un punto vacío en la representación gráfica de la función implica la existencia del límite de una función cuando tiende a (por izquierda, por derecha o por ambos lados), pero no de la imagen de esa función en el punto

CONCLUSIONES

Las construcciones mentales previstas en ambas DGI aparecieron mayoritariamente en las producciones realizadas por los estudiantes. Podría decirse entonces que las DGI han sido verificadas empíricamente, por lo que pueden constituir un modelo útil de cognición, aunque factible de ser mejorado. Como afirmamos anteriormente en el marco teórico, la DG no es única y tampoco tiene limitaciones en cuanto a su evolución. Puede ser revisada con el fin de refinarla; rediseñar las actividades, discusiones de clase y ejercicios; y volver a aplicar el ciclo de enseñanza ACE con nuevos instrumentos, adecuados a la DG refinada, con el objetivo de obtener una descripción más precisa y detallada de las construcciones mentales que el estudiante puede evidenciar al enfrentarse al estudio de funciones, límites y continuidad de funciones de una variable real.

Cuando los estudiantes resolvieron las consignas relacionadas con el concepto de función, en las situaciones relacionadas con expresiones algebraicas, gráficas, tablas y proposiciones, más del 76% (n = 13) de los estudiantes evidenció la construcción de una concepción Proceso.

En las ecuaciones paramétricas se encontró la menor cantidad de estudiantes que evidenció la construcción de una concepción Proceso. El 47% (n = 8) dio cuenta de ello, mientras que el resto mostró la construcción de una concepción Acción.

Algo similar ocurrió con las situaciones en las que se presentaron pares ordenados y sucesiones.

En todas las situaciones que involucraron expresiones algebraicas definidas en forma explícita o por partes, uno o dos estudiantes evidenciaron la construcción de una concepción Objeto.

Al considerar la actividad en su totalidad, el 59% (n = 10) de los estudiantes mostró la construcción de una concepción Proceso.

Más del 75% (n=13) de los estudiantes mostró la construcción de una concepción Proceso en todas las situaciones en las que se presentó una expresión algebraica en cualquiera de sus formas, una tabla, una gráfica o una proposición.

Es decir, cuando los estudiantes se enfrentaron a situaciones habituales, que les resultaban más cercanas, pudieron dar cuenta de haber construido un nivel de comprensión de Proceso.

Cuando resolvieron situaciones menos habituales o poco conocidas, los estudiantes dieron cuenta de haber construido un nivel de Acción. Tal el caso de las ecuaciones paramétricas y las relaciones presentadas a través de pares ordenados o sucesiones.

Esta apreciación se condice con un estudio sobre la concepción de función por parte de estudiantes universitarios (Evangelidou, Spyrou, Elia & Gagatsis, 2004) en el que los autores afirman que la mayoría de los estudiantes parecen identificar como funciones las formas estereotipadas que les son familiares desde la escuela secundaria.

Creemos necesario entonces, de cara a nuevos procesos de enseñanza y aprendizaje que se lleven a cabo, incluir en las planificaciones situaciones que no resulten habituales para los estudiantes e incluso poco conocidas o desconocidas para ellos, con el fin de darles una mayor oportunidad de construcción del concepto de función.

Al resolver las consignas relacionadas con los conceptos de límite y continuidad de funciones, del conjunto de los estudiantes, 43 pudieron ser clasificados en diferentes niveles de acuerdo con las construcciones mentales evidenciadas en la totalidad de las actividades. El 16% (n=7) fue clasificado en un nivel entre Acción y Proceso, el 47%

(n=20) en un nivel Proceso, el 14% (n=6) en un nivel entre Proceso y Objeto, y el 23% (n=10) en un nivel Objeto.

Esto no quiere decir que los estudiantes hayan evidenciado solo el nivel en que se los ha clasificado, sino que, de acuerdo con el marco teórico adoptado, dieron muestras de otras construcciones mentales, moviéndose entre Acción, Proceso y Objeto según la característica de la consigna que tenían que resolver.

En ambos casos, las entrevistas resultaron, además, un instrumento importante para terminar de caracterizar el nivel de comprensión del estudiante, es decir, para confirmar o modificar lo que se había observado en la producción escrita. Por ello, coincidiendo con las investigaciones mencionadas en el marco teórico, resulta importante combinar las entrevistas con las producciones en lápiz y papel para profundizar aún más el análisis y la contrastación de la DG.

Indicadores de producción

Publicaciones Científicas en Revistas con Referato

FARABELLO S.P., TRIGUEROS M. (2023). Niveles de comprensión del concepto de función en estudiantes universitarios. UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19(67), 1-22. ISSN: 1815-0640. Disponible en: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/981/1118

FARABELLO S.P., TRIGUEROS M. (2023). Comprensión del concepto de transformación de funciones trigonométricas en estudiantes universitarios. REIEC - Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 18(1), 20-32. ISSN: 1850-6666. DOI: https://doi.org/10.54343/reiec.v18i1.376

FARABELLO S.P., TRIGUEROS M. (2023). Comprensión del concepto Transformación de Funciones y su aplicación a la ecuación sinusoidal de la onda. REIEC - Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 18(2), 4-6. ISSN: 1850-6666. DOI: https://doi.org/10.54343/reiec.v18i2.409

Presentaciones a congresos nacionales

MORALES Y.M., MOSTTO M.F., RASCHETTI O.A., FARABELLO S.P. (2024). Comprensión del concepto de límite y continuidad de funciones de una variable real. VIII Jornadas de Educación Matemática – V Jornadas de Investigación en Educación Matemática

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky E., Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, NY: Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1997). A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. *MAA Notes*, *2*, 37-54. DOI:10.1090/cbmath/006/01

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 08*(03), 24-41. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/10056/1/Aplicacion1996Dubinsky.pdf

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I. & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 351-358

Fregona, D. (2013). Una propuesta de análisis para la preparación y gestión de clases de matemática. *Cuadernos de Educación, 11*(11). ISSN: 2344-9152

López Acosta, L.A. (2011). *Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis inédita de licenciatura). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México.

Guachimin Quingaluisa, E. O. (2020). *Análisis comparativo de: Cottrill, Swynygard y Larsen, Pons, y Arias*. Mauritius: Editorial América Española.

Hernandez-Suarez, C. A., Prada-Núñez, R., y Ramírez-Leal, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. *Revista Perspectivas*, *2*(2), 73-83. DOI: https://doi.org/10.22463/25909215.1316

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Quintanilla Cóndor, C.N. (2009). *Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la Teoría APOS*. (Tesis inédita de maestría). Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Disponible en: https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/1194

PID9117 **Denominación del Proyecto**
Construcciones y mecanismos mentales asociados a los conceptos de función, límite y continuidad de funciones

Directora
Sergio Pablo Farabello

Codirectora
Carina Alejandra FUSSE

Unidad de Ejecución
Universidad Nacional de Entre Ríos

Dependencia
Facultad de Bromatología

Contacto
sergio.farabello@uner.edu.ar

Cátedra/s, área o disciplina científica
Matemática I y Matemática II

Integrantes del proyecto
Docentes UNER: Morales, Yanina Macarena; Mostto, María Florencia; Raschetti, Octavio Agustín. Becaria PID: Puebla, Elisa Valentina

Fechas de iniciación y de finalización efectivas
26/04/2021 y 24/04/2024
Aprobación del Informe Final por Resolución C.S. N° 074/25 (28/03/2025)

<<< Volver al inicio